

ESCUELA TECNICA DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACION

APUNTES DE FISICA DEL
CURSO DE ACCESO-PLAN DE 1964.

Tomados del profesor de la asignatura.

Sr. MARTIN PEREDA.

Madrid, Octubre de 1967.

CALCULO VECTORIAL

Suponemos conocidas las propiedades fundamentales de los vectores sus elementos característicos, sus productos escalares, vectorial y mixto, su representación en sistemas ortogonales. Unicamente definiremos aquí, como simple recordatorio, los tipos de vectores que mas frecuentemente nos encontraremos.

1.1 Tipos de vectores.

Vectores localizados: aquellos que se encuentran firmemente unidos a un punto del espacio sin que puedan separarse de él. Un vector de este tipo es el que representa, por ejemplo, al peso de un cuerpo, que queda localizado en el centro de gravedad del mismo.

Vectores deslizantes: en estos, un punto de aplicación en lugar de estar solidario en un punto fijo, queda en libertad para ser cualquiera de la resta que los contiene. Unicamente queda pues fija su línea de acción. Ejemplo de este tipo de vectores es el que tenemos con el concepto de fuerza aplicada sobre un cuerpo, que pueda situarse sobre cualquier punto de la línea que le soporta, que este naturalmente en el cuerpo en cuestión.

Vectores libres: son aquellos que su punto de aplicación puede ser cualquiera de todo el espacio considerado. De este tipo son los ejes de los pares.

1.2 CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

Se entiende por campo toda región de espacio en la que a cada punto de la misma corresponde una magnitud física. Esta magnitud física es pues función de punto y su variación se pondrá de manifiesto de acuerdo con la derivada de la misma, concepto que luego veremos.

El campo podrá ser de dos tipos, de acuerdo con la magnitud física que corresponde a cada punto. Por ello, podremos encontrarnos campos escalares y vectoriales.

Campos escalares nos los encontramos, por ejemplo, cuando trabajamos con temperaturas. Con dar unicamente el valor de estas en cada punto de la región que estemos considerando, queda determinado el campo no hace falta mas que un número, esto es, un escalar.

En cambio cuando queremos estudiar una corriente de un fluido, no bastará con dar el valor modular de la velocidad de ésta en cada punto, sino que además será necesario indicar su dirección y su sentido, esto es, un vector para cada punto. Este tipo de campo es claramente un campo vectorial.

Para la representación de campos escalares se recurre a los deno-

minados superficies equiescalares o isotimicas , esto es, al lugar geometrico de todos los puntos que poseen un valor de la magnitud escalar considerada igual. Naturalmente nunca se cortarán pues equivaldria a que un mismo punto tendria dos valores para la magnitud en cuestion, cosa que en fisica clásica es totalmente imposible.

Esto, veremos luego, no se cumple en Mecanica Cuántica, donde si puede ocurrir.

Con respecto alos campos vectoriales, su representación se realiza por líneas de flujo. Estas líneas se caracterizan porque en cada punto son tangentes al vector campo en el mismo.

Tampoco podrán cortarse ya que implicaria dos vectores campo para un mismo punto. Naturalmente el campo habrá de ser continuo en la zona donde vayamos a definir estas líneas de flujo, y excluirémos por tanto los puntos aislados o singulares y las líneas aisladas o singulares. Un ejemplo de esta exclusión lo tenemos en el caso del campo eléctrico creado por una carga, donde el punto ocupado por la misma habrá de considerarse singular a efectos de tal representación.

Una cuestión interesante que debemos señalar es la relativa a la relacion entre campos y ejes de coordenadas. En un campo escalar nos encontramos la propiedad importantísima de que es invariante para cualquier transformación de coordenadas especiales que hagamos. El valor numerico del campo en un punto es el mismo expresense como se expresen sus coordenadas. En cambio, la expresión matemática de éste campo, podrá variar al variar el sistema de referencia.

Pero en la expresión matemática del campo total, no el valor del mismo en cada punto, que es lo que le caracteriza.

En cambio, en un campo vectorial la cuestión es otra. La magnitud que estamos considerando viene determinada por un vector , y la expresión del mismo variara según varien los ejes de coordenadas. Podra ser el módulo el mismo en un sistema y en otro; pero el módulo solo es una de las características que le determinan. La dirección y el sentido, en general, habrán variado.

Vemos ya de aqui, una diferencia fundamental entre un tipo de campo y otro : la invariancia ante los cambios de ejes. Sera pues interesante encontrar alguna función, algo, que nos de, en un campo vectorial, lo que permanece de el invariante al cambiar de ejes.

Esto será lo que busquemos en los siguientes apartados.

1.3 DERIVADA DE UN VECTOR RESPECTO DE UN ESCALAR

Consideremos el vector $\bar{a} = \bar{a}(u)$ siendo u una variable escalar: pasando de u a $u + \Delta u$, el vector \bar{a} habrá sufrido un incremento de

$$\Delta \bar{a}(u) = \bar{a}(u + \Delta u) - \bar{a}(u) \quad \text{que será otro vector;}$$

efectuando la division por Δu , nos resultaria tambien otro vector que, cuando Δu tienda a cero, será, el vector que denominaremos derivadas del \bar{a} con respecto a u . Esto es:

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\bar{a}(u + \Delta u) - \bar{a}(u)}{\Delta u} = \frac{d\bar{a}}{du}$$

si consideramos $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, referido a un sistema cartesiano fijo

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}$$

esto es, la derivada es un vector de componentes las derivadas de sus coordenadas.

1.4 GRADIENTE DE UNA FUNCION ESCALAR DE PUNTO

Consideremos un campo escalar, dado por la magnitud escalar continua y derivable en todo el espacio considerado. A partir de este campo escalar vamos a tratar de forma otro vectorial que nos de una indicacion de como varia el escalar, esto es, aparte de saber cuanto vale el campo en un punto, saber en qu dirección y sentido en torno al mismo, crece con mayor rapidez. Para ello vamos a relacionar a cada punto un vector, vector que indique esto que deseamos: sentido de crecimiento mayor del campo y valor de este aumento. Y este vector viene dado por el de componentes:

$$\text{grad } A = i \frac{\partial A}{\partial x} + j \frac{\partial A}{\partial y} + k \frac{\partial A}{\partial z} = \nabla A = \nabla \cdot A \quad (\text{producto escalar})$$

$$\nabla = \text{operador de Hamilton, (o Nabla)} = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

si estamos operando con coordenadas cartesianas. Normalmente, en la mayor parte de los libros, se procede al revés: se define primero el vector gradiente y luego se ve que coincide con la derivada direccional máxima.

En el Apéndice nº1 puede verse la demostración hecha en el sentido debido, esto es como hemos dicho anteriormente.

1.5 DIVERGENCIA DE UN VECTOR

1.5.1 FLUJO DE UN VECTOR

Sea un elemento de superficie ds en el cual, el valor de la magnitud vectorial que constituye el campo en cuestión, es práctica-

mente constante y de valor \bar{a} . Esta superficie vendrá representada por un vector \vec{ds} de módulo el área de la misma, de dirección la de la normal y de sentido el que hayamos arbitrariamente tomado según cierto convenio. Entonces, llamaremos flujo elemental del campo \bar{a} a través de ds a

$$d\phi = \vec{ds} \cdot \vec{a}$$

Una significación gráfica es la del número de líneas vectoriales del campo \bar{a} que atraviesan ds . Pero una significación un poco arbitraria.

El flujo extendido a toda la superficie será

$$\phi = \iint \bar{a} \cdot \vec{ds}$$

Este flujo será positivo si salen más líneas que entran y negativo si ocurre lo contrario. Esto tratándose de una superficie cerrada.

1.5.2 CONCEPTO DE DIVERGENCIA

Si algún ente físico se genera en el interior de una cierta región del campo, esta región es llamada una fuente y si el ente físico es absorbido, la región se denomina sumidero. Naturalmente, si no existen ni fuentes ni sumideros en el campo, el aumento neto del flujo del ente físico en cuestión es nulo en cualquier región del mismo. Si el suministro total de las fuentes es mayor que la absorción de los sumideros, se dice que el aumento de flujo es positivo y viceversa.

Tomemos ahora un punto P al que supondremos contenido dentro de un volumen ΔV del campo vectorial que estamos estudiando. El aumento neto del flujo por unidad de volumen, será.

$$\frac{\iint_{\Delta s} \bar{a} \cdot \vec{ds}}{\Delta V}$$

siendo Δs la superficie que encierra a ΔV . Si ahora contraemos ΔV de forma que tienda a cero rodeando al punto P en cuestión, la cantidad que nos resulta es lo que denominaremos divergencia de \bar{a} en el punto P . Esto es:

$$\text{div } \bar{a} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta s} \bar{a} \cdot \vec{ds}}{\Delta V}$$

vemos pues que lo que hemos obtenido es un escalar que nos da idea de la presencia o no de sumideros o manantiales en los puntos de

cambios: un desplazamiento de su posición a otra, según una trayectoria recta; una deformación de su forma, por la presencia de presiones exteriores; o un giro en torno a un determinado eje. Pues bien, el rotacional nos va a dar una idea de este último fenómeno es decir, del posible giro de la esfera.

Par ello, consideremos la circulación media del vector \vec{A} por unidad de área de una superficie arbitraria S sosteniendo a C (ver 1.7.1) (es decir, que pase a través de C y tenga a C por contorno). Esta circulación será:

$$\frac{\int_C (\vec{A} \cdot d\vec{s})}{\int_C d\sigma} \quad \text{con } d\sigma \text{ como diferencial de superficie.}$$

cuando la superficie Σ que rodea a un punto P , tiende al mismo, el límite del cociente anterior, si existe, recibe el nombre de circulación en el punto P . Este límite, cumpliendo A unas ciertas condiciones, es único e independiente del tipo de superficie Σ .

Podemos ahora construir un vector cuya componente a la dirección de la normal positiva a Σ sea la circulación en P . Dicho vector recibe el nombre de rotacional de A en P , representándose por $\text{rot } \vec{A}$ (en algunos libros americanos se representan también por $\text{curl } \vec{A}$).

Esta definición, igual que en el caso de la divergencia, no es fácil de aplicación para la mayor parte de los problemas que se nos presentan. Por tanto se requerirá un grupo de fórmulas que nos den el $\text{rot } \vec{A}$ conocido $A = iA_x + jA_y + kA_z$. El cálculo de las mismas; se realiza de manera análoga a la de la divergencia y con la aplicación de la definición.

$$\text{rot}_n \vec{A} = \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{\int_C \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta \sigma}$$

Resulta un vector de componentes

$$\text{rot}_x A = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$\text{rot}_y A = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$\text{rot}_z A = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

nuestro campo. Una divergencia nula supondrá evidentemente la ausencia de ambos.

Como esta supresión sera engorrosa calcularla en cada caso, conviene tomar una forma de operar que sea mas fácil de manejo. La fórmula a la que se llega, y que puede verse su obtención en el apéndice II es:

$$\nabla \cdot \vec{a} = \text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Esta seria su expresión en coordenadas regulares. Si operásemos con cilíndricas o esféricas, seria naturalmente otra.

El tipo de campo en el que no existen ni manantiales ni sumideros esto es, de divergencia nula, recibe el nombre de solenoidal.

1.5.3. TEOREMA DE GAUSS.

Tomemos la superficie S cerrada que rodea al volumen V , todo ello sumergido en un campo \vec{a} . Podemos subdividir el volumen encerrado por esa superficie en celdas parciales ΔV_i y considerar la divergencia sobre esos volúmenes parciales. Por definición tendremos

$$\text{div } \vec{a} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S_i} \vec{a} \cdot d\vec{s}}{\Delta V_i}$$

si hacemos que \vec{a} sea el mismo en todo el volumen quedará

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot d\vec{s}_i}{dv_i} \quad \text{o} \quad \text{div } \vec{a} \cdot dv_i = \vec{a} \cdot d\vec{s}_i$$

sumando para todo el volumen $\sum_i \text{div } \vec{a} \cdot dv_i = \sum_i \vec{a} \cdot d\vec{s}_i$ o ya

$$\iiint \text{div } \vec{a} \, dv = \iint \vec{a} \cdot d\vec{s}$$

que es la expresión del teorema buscada.

1.6. INVARIANCIA DE LA DIVERGENCIA

La invariancia de la divergencia viene puesta de manifiesto por el hecho de la invariancia del producto escalar de dos vectores ante un cambio de eje coordenados. De acuerdo entonces con el teorema de Gauss visto anteriormente, el segundo miembro del mismo será constante para todos los sistemas y por ello podremos

poner

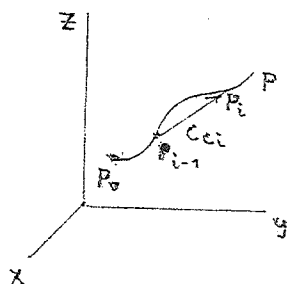
$$\begin{aligned} \iiint \operatorname{div} \bar{a} \, dv &= N && \text{y para otro sistema} \\ \iiint \operatorname{div}_1 \bar{a} \, dv &= N' && \text{restando ambas expresiones} \end{aligned}$$

$$\iiint (\operatorname{div} \bar{a} - \operatorname{div}_1 \bar{a}) \, dv = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \bar{a} = \operatorname{div}_1 \bar{a} \quad \text{c.q.d.}}$$

1.7 ROTACION DE UN VECTOR

1.7.1 CIRCULACION DE UN VECTOR

Consideremos una región del espacio en la cual está definido un vector \bar{A} y dos puntos P_0 y P de la misma, unidos por una curva continua C , en cuyos puntos está definido \bar{A} . Tomemos



$n-1$ puntos P_i que dividen al arco de curva en n segmentos S_i , y formemos la suma

$$\sum_{i=0}^{n-1} \bar{A}_i \cdot \Delta \bar{C}_i$$

donde \bar{A}_i es el valor de \bar{A} en el punto $P_i (x, y, z)$ y $\Delta \bar{C}_i$ el vector de componentes rectangulares $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ y que unen

los puntos P_{i-1} y P_i . Cada término de esta suma representa el producto de la componente \bar{A} en la dirección $\Delta \bar{C}_i$, por ΔC_i . Si esa suma tiende a un límite finito cuando el número de puntos de división crece indefinidamente de modo que $\Delta C_i \rightarrow 0$, se define a ese límite como la integral curvilínea $\int_C \bar{A} \cdot d\bar{s}$ a lo largo de la curva C . O sea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{A}_i \cdot \Delta \bar{C}_i = \int_C \bar{A} \cdot d\bar{s}$$

Esta integral dependerá, en general de la trayectoria C que une los puntos P_0 y P . Habrá unos casos en que no ocurra así. Los veremos luego.

Si la trayectoria en lugar de empezar en P_0 y acabar en P , acaba y comienza en el mismo punto P , el valor de la integral recibe el nombre de circulación de \bar{A} alrededor de la trayectoria C .

1.7.2 CONCEPTO DE ROTACIONAL

Consideremos una pequeña esfera de fluido incomprensible, introducida en una corriente del mismo fluido. Con relación a dos instantes sucesivos, esta esferita habrá podido sufrir tres tipos de

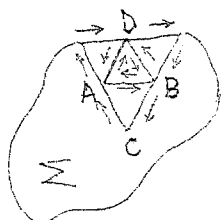
que puede ponerse en forma de determinante resultando

$$\text{rot } A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

La demostración puede verse en el apéndice III.

1.7.3 TEOREMA DE STOKES

Para el planteamiento de la expresión matemática del mismo, seguiremos un camino a cierta manera análogo al que tuvimos para el teorema de Gauss. Tomaremos una superficie Σ y la dividiremos en pequeñas parcelas $\Delta \sigma_i$ como por



ejemplo la triangular ABC de la figura. De acuerdo con la definición del rotacional se obtiene que:

$$\text{rot}_n A \cdot \Delta \sigma_i = \int_C \bar{A} \cdot d\bar{s} + \epsilon_i \Delta \sigma_i$$

donde el segundo sumando del segundo miembro se presenta debido a la supresión del \lim que hemos hecho. Podemos hacer igual para todas las posibles parcelas de la superficie y sumar. Con ello nos quedará

$$\sum_i \text{rot}_n A \cdot \Delta \sigma_i = \sum_i \int_{C_i} \bar{A} \cdot d\bar{s} + \sum_i \epsilon_i \Delta \sigma_i$$

Estudiemos la primera sumatoria del segundo miembro. En ella hacemos intervenir todas las circulaciones de las parcelas en que hemos dividido la superficie total Σ . Ahora bien, si consideramos el trozo AB de la figura veremos que, cuando consideramos su circulación con respecto a la parcela ABD, lo es de derecha a izquierda, mientras que si tomamos la ABC, resulta que lo es en sentido contrario. Como el vector \bar{A} para ambos casos es el mismo, resultaría que al sumar aparecerían con signos contrarios y se anularían. Así ocurre en todas las paredes interiores de las parcelas formadas: que se anulan sus incuciones unas con otras. Por ello, al final, nos quedará solo la circulación por el contorno general que envuelve a la superficie con lo que queda, pasando ya al límite:

$$\iint \text{rot}_n \bar{A} d\sigma = \int_c \bar{A} \cdot d\bar{s}$$

que es la expresión buscada del teorema de Stokes. Su interpretación física es: el flujo del vector rotacional de un cierto vector, por una superficie es igual a la circulación del mismo por el contorno que rodea a la superficie.

Esta consecuencia venia ya casi implícita en la definición de rotacional,

1.7.4 INTERPRETACION FISICA DEL ROTACIONAL

Como aclaración al concepto puramente físico de rotacional que se ha dado anteriormente y a la imagen física presentada, veamos el caso del movimiento de la esfera de fluido en la corriente del mismo. Supongamos, para simplificar, que se trata de una esfera que no sufre deformación alguna. Sea \vec{v}_p la velocidad instantánea de un punto de la misma. Esta v_p podrá descomponerse en dos componentes, una de las cuales es la velocidad de translación v_0 de un punto O arbitrariamente elegido en la esfera y la otra debida a la velocidad angular de rotación ω del cuerpo alrededor de una recta que pasa por O . Sea \vec{r} el vector de origen O y extremo P : la velocidad de cada punto P del cuerpo, es

$$\vec{v}_p = \vec{v}_0 + \omega \wedge \vec{r} \quad \text{tomando rotacionales}$$

$$\text{rot } \vec{v}_p = \text{rot } \vec{v}_0 + \text{rot } (\omega \wedge \vec{r})$$

mas v_0 es la misma para todos los puntos del cuerpo e independiente pues de x, y, z , así $\text{rot } \vec{v}_0 = 0$. Si es $\vec{r} = ix + jy + kz$ queda

$$\omega \wedge \vec{r} = i(\omega_y z - \omega_z y) + j(\omega_z x - \omega_x z) + k(\omega_x y - \omega_y x),$$

y calculando el rotacional da

$$\text{rot } (\omega \wedge \vec{r}) = 2(i\omega_x + j\omega_y + k\omega_z) = 2\omega$$

es decir, que el rotacional del campo de velocidades \vec{v} es igual al doble de la velocidad angular de rotación.

1.8 OPERADOR NABIA (∇)

Ligando a un sistema cartesiano de coordenadas lo definiremos

DINAMICA DE SISTEMAS DE PARTICULAS

2.1. SOLIDOS Y PUNTOS MATERIALES PARTICULAS.

Todos los cuerpos presentes en el Universo son materiales, esto es, cada uno posee una masa de inercia o inerte, susceptible de ser expresada mediante un número, si tomamos como masa comparativa la de un cuerpo determinado. Esta masa inerte es absoluta, o sea, independiente del sistema de referencia que se utilice para fijar la posición de la misma. Evidentemente se trata de una magnitud escalar.

Por punto material o particular física de la Mecánica entendemos todo corpusculo o cuerpo de dimensiones suficientemente pequeñas para que pueda asimilarse a un punto geométrico, dentro del orden de magnitud que estemos trabajando; esto es, que para su localización en el espacio bastará con el dato de tres coordenadas únicamente.

De hecho, esta idealización física no es solo sino una aproximación, Ahora bien, según veremos luego, debido a que el movimiento y en general, el comportamiento de un conjunto de partículas puede estudiarse estudiando el de un punto característico del mismo la aproximación no está tan alejada de la realidad como podía parecer.

En cuanto a sólido material entendemos con este nombre todo cuerpo material, que, ya es sólido, está compuesto de un conjunto de corpusculos. Realmente no se trata pues de un cuerpo continuo, pero en la mayor parte de los casos que veremos aquí será conveniente tratarlo como tal esto es, considerar que su masa inerte está distribuida en él en todo el volumen que ocupa de una forma uniforme. Esto facilitará el uso del cálculo infinitesimal cuando convenga. Este sólido material podrá ser, en general, deformable o indeformable. Sólido indeformable, o también, sólido rígido, será aquel en el que la posición relativa de sus partículas permanece invariable al actuar fuerzas o no sobre el mismo. Deformable será, como su nombre indica, en el que ocurre lo contrario. Todos los cuerpos físicos reales son deformables en una cierta medida, pero en la mayor parte de las cosas, las deformaciones que se nos presentarán serán de tal magnitud que podremos despreciarlas sin que afecten para nada a nuestros casos. Por ello, consideramos como sólidos rígidos a la mayor parte de los cuerpos con los que trataremos.

2.2. AXIOMAS DE LA MECÁNICA CLÁSICA PARA PARTICULAS

Estos axiomas que enumeramos a continuación no son evidentes, a priori, pero su realidad se ha comprobado reiteradamente a lo largo de

numerosos experimentos. Fueron postulados por Newton y son los tres -- siguientes.:

2.2.1. PRINCIPIO DE INERCIA

Todo cuerpo conserva su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme, a menos que sea obligado a cambiar el mismo por fuerzas aplicadas sobre el.

Vemos pues que la velocidad uniforme es un estado de equilibrio, en oposición con lo que podía parecer a primera vista.

2.2.2. RELACION DE FUERZA CON MASA Y ACELERACION

El cambio de la cantidad de movimiento ($m\bar{v}$) de un cuerpo es proporcional a la fuerza matriz aplicada y se efectúa en la dirección de la recta en que se aplica esa fuerza.

La expresión matemática será:

$$\bar{F} = \frac{d(m\bar{v})}{dt}$$

en el caso de que la masa permanezca constante con el tiempo, queda --

$$\bar{F} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = m \bar{a}$$

esta suposición no se cumple en el caso de que la velocidad sea del orden de magnitud de la luz (caso relativista) pero es de señalar que la expresión matemática, como expresada originariamente por Newton se viene verificando, esto es, en función de la cantidad de movimiento y no de la aceleración como se suele ver normalmente en la mayor parte de los libros.

2.2.3. PRINCIPIO DE LA IGUALDAD DE LA ACCION Y LA REACCION.

A toda acción se opone siempre una reacción igual y contraria; o bien, las acciones mutuas entre dos cuerpos son siempre iguales y en sentidos contrarios.

Así pues, si dos puntos materiales aislados P, y P₂, de masas inertes m, y m₂ están en presencia uno del otro, en un instante t, animados de velocidades cualesquiera en un espacio absoluto, tomarán las aceleraciones respectivas a, y a₂ tales que

$$m, \bar{a}, = - m_2 \bar{a}_2$$

pero fundamentalmente, estas fuerzas de acción y reacción actúan siempre sobre cuerpos diferentes y según la recta que une ambos cuerpos.

De una forma general podremos decir que las fuerzas que actúan sobre un cuerpo se habrán originado siempre en otros cuerpos. Una fuerza aislada es solo una abstracción de la interacción mutua entre dos

dos cuerpos; todas las veces que un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, este último ejercerá siempre otra fuerza opuesta sobre el primero. Cualquiera de las dos puede llamarse la "acción" y la otra la "reacción".

2.3. FUERZAS QUE ACTUAN SOBRE UN SISTEMA MATERIAL

Las fuerzas que actúan sobre un sistema material puede clasificarse, en general, en dos grupos : exteriores e interiores. Estudiemos ambos de una forma particular.

Ya se ha dicho anteriormente que todo sólido material, sea sólido o fluido, está constituido por puntos materiales. Considerando uno de ellos en particular, ejercerá sobre otro cualquiera de ellos una cierta fuerza que denominaremos acción, ejerciendo el último sobre el primero otra fuerza que será la reacción estas fuerzas son interiores al sistema.

Igualmente, si estamos ahora estudiando un gas y este se expande libremente, las fuerzas que habrán intervenido serán interiores tan solo.

Dependiendo pues de la naturaleza del sistema, podemos decir en general, que las fuerzas interiores son todas ellas debidas a interacciones entre las partículas que forman el mismo. Se encontrarán por parejas; serán de igual magnitud dirección la de la recta que las une y sentido opuesto.

Fuerzas exteriores son, por el contrario, como su propio nombre indica aquellas que proceden de elementos físicos extraños al sistema considerado. Un ejemplo de este tipo de fuerzas lo tenemos en el peso de un cuerpo.

Además de todo lo anterior, y como un caso particular de fuerzas exteriores, se nos presentan las fuerzas de ligazón. Ocurre esto, cuando algunas de las partículas del sistema se ven obligadas a cumplir unas ciertas condiciones que limitan su movimiento. Estas condiciones pueden ser completas o laterales e incompletas o unilaterales, según que sean expresables analíticamente por una igualdad o una desigualdad. Así por ejemplo, si un punto está sujeto, mediante una varilla rígida de longitud L permanecen a una distancia fija de un punto O , extremo opuesto de la varilla, la ligazón se expresará mediante la condición de que las 3 coordenadas del punto móvil referido a un sistema de ejes rectangulares, que pasen por O , verifiquen

$$x^2 + y^2 + z^2 = L^2;$$

esta ligazón es pues completa o lateral . Una ligazón unilateral la tendríamos si en lugar de tratarse de una varilla rígida fuera un hilo flexible e

e inextensible ; la ligazón vendría entonces expresado por

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq L^2$$

o sea por una desigualdad.

Estas ligaduras obligarán a que la trayectoria de la partícula no sea arbitraria, si no que tenga según línea o superficie determinada. Impondremos en nuestro estudio que las ligaduras son ideales, esto es, obligarán a cambiar la dirección de la velocidad de las partículas, pero no sus magnitudes. Las aceleraciones que hacen falta para tal modificación del sector velocidad las atribuiremos a fuerzas que actúan sobre esas partículas y son las que llamaremos fuerzas de reacción de las ligaduras.

2.4. REPASO DE MECANICA DE UNA PARTICULA

2.4.1.- TEOREMAS DE CONSERVACION

Durante el movimiento de un sistema mecánico y en nuestro caso concretamente, de una partícula mecánica, las 6 cantidades x_i y \dot{x}_i ($i=1, 2, 3$) que especifican el estado de la misma variación con el tiempo. Existen sin embargo, , funciones de estas cantidades cuyos valores permanecen constantes durante el movimiento, y dependen solamente de las condiciones iniciales. Estas funciones se denominan "integrales del movimiento" o "constantes del movimiento".

No todas ellas son, sin embargo, de igual importancia en mecánica . Hay algunas cuya constancia es de un profundo significado. Las cantidades representadas por tales constantes del movimiento se dicen ser "conservativas" y tienen la importante propiedad de ser aditivas es decir, sus valores, para un sistema compuesto de varias partes cuya interacción es despreciable son iguales a las sumas de los valores para las partes individuales. Y es esta aditividad precisamente la que les da la importancia que poseen en mecánica.

Veamos pues algunas de estas constantes.

2.4.1.1.- CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La cantidad de movimiento de una partícula es un Vector \vec{P} definido como el producto de su masa m por su velocidad \vec{v} .

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

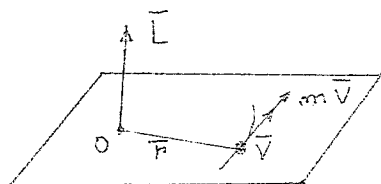
Como de la segunda ley de Newton era

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, \vec{P} es constante ya que

$$\vec{F} = 0 = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \text{cte}}$$

2.4.1.2.- CONSERVACION DEL MOMENTO ANGULAR O CINETICO



Consideremos una partícula de masa m y cantidad de movimiento, \vec{p} en una posición \vec{r} con respecto al origen O de un sistema de coordenadas. Por definición la cantidad de movimiento angular o momento angular de la partícula con respecto a O , es el momento de la cantidad de

movimiento \vec{p} .

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

por su definición vemos que se trata de un vector axial.

Si a la partícula le aplicamos ahora una fuerza \vec{F} , variará \vec{p} y por tanto \vec{L} . Veamos la relación entre \vec{F} y esta variación de L .

Era $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
mente por \vec{r}

multiplicando ambos miembros vectorial-

$$\vec{r} \times \vec{F} = r \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{y derivando con respecto al tiempo --}$$

(si $\vec{F} \times \vec{r} = \vec{M}$) la \vec{L}

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ahora bien

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times (m\vec{v}) = m \vec{v} \times \vec{v} = 0$$

y queda

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

si $\vec{r} \times \vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L} = \text{cte}}$

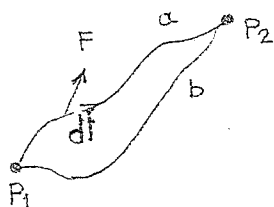
Luego si el momento de la resultante de las fuerzas aplicadas a la partícula, respecto al punto O , es cero, su momento angular respecto al punto O se conserva.

\vec{M} será nulo cuando \vec{F} o \vec{r} sean cero, o bien cuando \vec{F} y \vec{r} sean paralelas.

Si \vec{L} es constante, el plano que forman \vec{p} y \vec{r} no varia durante el movimiento de la partícula. La trayectoria que esta recorre es plana.

2.4.1.3. CONSERVACION DE LA ENRGIA TOTAL DE UNA PARTICULA

Supongamos una partícula en un campo vectorial de fuerzas \vec{F} .



Al desplazarla desde p_1 a p_2 por una cierta trayectoria, el trabajo realizado será la integral de línea de la fuerza a lo largo de esa línea, esto es:

$$W_{12} = \int_e \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_e \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{l} = \int_e m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{l} \quad \text{como } \vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

$$W_{12} = \int_e m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int_e m \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} v^2\right) = m \left[\frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 \right]$$

y llamando a $\frac{1}{2} m v^2 = T$ energía cinética queda

$$W_{12} = T_2 - T_1$$

Esto es: el trabajo realizado por una fuerza o sistema de fuerza sobre una partícula es igual a la variación de su energía cinética. Expresión que es completamente general para todo tipo de campos.

Veamos un caso particular y que presenta un gran interés. Es aquel en el que las fuerzas del campo se pueden considerar derivadas de un potencial, esto es:

$$\vec{F} = -\nabla \phi$$

a la cantidad escalar $V = -\phi$ se la denomina energía potencial de la partícula en el campo conservativo tratado. Según lo visto en el tema I el trabajo que realice la partícula al recorrer los distintos caminos o trayectorias de P_1 a P_2 es el mismo, es decir:

$$W_{12}^{(a)} = W_{12}^{(b)} \quad \text{ó} \quad W_{12}^{(a)} + W_{21}^{(b)} = 0$$

Introduciendo la función V en la expresión del trabajo queda

$$\int_e \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_e \nabla V \cdot d\vec{l} = - \int_e \frac{\partial V}{\partial l} dl = - \int_e dV = V_1 - V_2 \quad \text{así que}$$

$$W_{12} = V_1 - V_2$$

expresión que solo es válida para campos conservativos.

Como de antes era $W_{12} = T_2 - T_1$, , igualando los trabajos.

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \Rightarrow \boxed{V_1 + T_1 = V_2 + T_2}$$

Es decir , en campos conservativos, la energia total de una partícula, suma de la energia cinética mas la potencial, se conserva al pasar de un punto a otro.

2.5. CENTRO DE MASAS

Todo cuerpo rígido ya hemos dicho antes puede suponerse compuesto de un número muy grande de partículas. Para estudiar su comportamiento podia tomarse cada una de ellas y aplicarlas las leyes de la Dinámica de partículas estudiada en 2.4. El movimiento total del sistema podria describirse pues por el conjunto de ecuaciones de cada partícula. - Esta formulación se ve ya intuitivamente, que cuando se intentase realizar para un número muy elevado de partículas, resultaría tremendamente engorrosa aparte de que la información global sobre el movimiento del sólido quedaria enmascarada. Por ello nos interesaria describir el movimiento del mismo, por el de un unico punto que fuera característico. Este -- punto va a ser el centro de masas.

Tomemos un sistema de n partículas, de las cuales la i -ésima tiene la masa m_i y está situada en \vec{r}_i en el instante t . Su velocidad y aceleración serán en el mismo, $\dot{\vec{r}}_i$ y $\ddot{\vec{r}}_i$. Sea $M = \sum m_i$ la masa total del sistema. Se define la posición \vec{r} del centro de masas del sistema, por la ecuación vectorial

$$\boxed{M \vec{r} = \sum_i m_i \vec{r}_i}$$

ecuación vectorial que puede desglosarse en tres escalares de la forma

$$M x = \sum_1^n m_i x_i \quad My = \sum_1^n m_i y_i ; Mz = \sum_1^n m_i z_i$$

Es inmediato que la velocidad $\dot{\vec{r}}$ y la aceleración $\ddot{\vec{r}}$ del centro de masas, vienen dados por

$$M \dot{\vec{r}} = \sum_1^n m_i \dot{\vec{r}}_i \quad M \ddot{\vec{r}} = \sum_1^n m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

Aunque para la definición de este centro de masas hemos hecho intervenir las coordenadas \vec{r}_i con respecto a un sistema de coordenadas, puede demostrarse directamente que la posición Q del mismo, no -

depende del sistema. En efecto, sea \bar{a} el vector de posición de O respecto al nuevo origen O'. El vector de posición \bar{r} con respecto al nuevo sistema sera.

$$M\bar{r}' = \sum m_i \bar{r}'_i = \sum m_i (\bar{r}_i - \bar{a}) = \sum m_i \bar{r}_i - M\bar{a} = M(\bar{r} - \bar{a})$$

de aqui $\bar{r}' = \bar{r} - \bar{a}$, lo que prueba que O' coincide con O.

En el caso de una distribución continua de masa de densidad T, la ecuación anterior deberá restituirse por

$$M\bar{r} = \int \bar{r} dm = \int T \bar{r} dv$$

2.6. MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS

Supongamos ahora que hay una interacción entre cada una de las partículas del sistema. Por el principio de acción y reacción, la fuerza -- Fij que la partícula m_j ejerce sobre la m_i es igual y opuesta a la F_{ji} que la m_i ejerce sobre la m_j .

Esto es ,

$$F_{ij} + F_{ji} = 0 \quad (2.6.a.)$$

Además de la fuerzas arriba mencionadas, podemos suponer que cada partícula m_i está sometida a una fuerza exterior, que podemos designar por F_{ii} .

Con esta notación, las ecuaciones del movimiento de la n partículas son :

$$\sum_i F_{ij} = m_i \ddot{\bar{r}}_i \quad i=1,2,\dots,n$$

sumandolas obtenemos

$$\sum_{i,j} F_{ij} = \sum_i m_i \ddot{\bar{r}}_i = M \ddot{\bar{r}}$$

pero por (2.6.a), todos las fuerzas de la suma doble del primer miembro se anulan por pares, exceptuando las fuerzas exteriores. Por ello.:

$$\boxed{\bar{F} = M \ddot{\bar{r}}} \quad (2,6,b,)$$

donde \bar{F} representa el vector suma de todas las fuerzas exteriores que actuan

sobre un sistema de partículas es nula, el centro de masa permanece en -- reposo o se mueve con movimiento rectilíneo uniforme. Esto podemos aplicar lo a cada dirección del espacio.

La expresión (2.6.B.) puede darse también en la forma

$$\bar{F} = \dot{\bar{P}} \quad (a.6.c.)$$

en la que $\bar{P} = \sum m_i \bar{r}_i$ es la cantidad de movimiento total del sistema.

2.7. PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

De la (2.6.c.) se deduce inmediatamente que si la componente en cualquier dirección de la resultante de las fuerzas exteriores se anula, la componente de la cantidad de movimiento en esa misma dirección se conserva.

2.8. CONSERVACION DEL MOMENTO ANGULAR O CINETICO

La demostración que haremos en líneas generales la que vimos en el caso de una partícula aislada. Allí vimos que el momento angular de la partícula i respecto al punto de referencia es

$$\bar{L}_i = \bar{r}_i \times \bar{P}_i$$

El momento angular para todo el sistema respecto al mismo punto O será

$$\bar{L} = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{P}_i = \sum_i \bar{L}_i \quad (2.8.a.)$$

Y allí era también.

$$\frac{d\bar{L}_i}{dt} = \bar{M}_i$$

donde \bar{M} era el momento respecto al punto fijo O de todas las fuerzas que actuaban sobre la partícula considerada.

Ahora bien como según vimos antes

$$F_{ij} + F_{ji} = 0 \quad (2.6.a.)$$

y debido a que las fuerzas F_{ij} y F_{ji} actúan según la recta de unión de las partículas de masas m_i y m_j , se verificará:

$$(\bar{r}_i - \bar{r}_j) \times F_{ij} = 0 \quad (2.8.b.)$$

y como de (2.6.a)

$$\bar{r}_i \times F_{ij} + \bar{r}_j \times F_{ji} = 0 \quad \text{aplicando (2.8.b.) queda. -}$$

$$\bar{r}_i \times F_{ij} + \bar{r}_j \times F_{ji} = 0 \quad (2.8.c.)$$

sumando para todas las partículas $\frac{d\bar{L}_i}{dt} = \bar{r}_i \times F_i$ quedará

$$\sum \frac{dL_i}{dt} = \sum_i r_i \times F_i$$

las fuerzas F_i que actúan sobre la partícula i las podemos descomponer en dos grupos: uno de fuerzas exteriores que designaremos por F_{ii} y otro de fuerzas de acción y reacción que llamaremos F_{ij} (fuerza sobre la partícula i debida a la j). Con ello queda

$$\sum_i \frac{dL_i}{dt} = \sum_{i,j} r_i \times (F_{ij} + F_{ji}) = \sum_{i,j} r_i \times F_{ij} + \sum_i r_i \times F_{ii}$$

mas debido a (2.8.c.) el primer sumando se anulará y quedará solo

$$\sum \frac{dL_i}{dt} = \sum_i r_i \times F_{ii}$$

el segundo miembro es claramente el momento resultante de las fuerzas exteriores con relación al origen, con lo que queda ya, si $\sum \frac{dL_i}{dt} = \frac{dL}{dt}$

$$\frac{d\bar{L}_s}{dt} = M_s$$

Esto es, la variación con el tiempo del momento angular, respecto a un cierto punto, de un sistema de partículas, es igual al momento resultante respecto a ese punto de las fuerzas exteriores que actúan sobre el mismo.

Para que el momento angular se mantenga constante habrá de verificarse evidentemente que el momento resultante de las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas sea nulo con respecto al punto que estamos considerando con ello

$$\frac{d\bar{L}_s}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{L}_s = \text{cte}$$

como es $\bar{L}_s = \sum \bar{L}_i = \bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \dots + \bar{L}_n = \text{cte}$

nos resulta que aunque los momentos angulares de cada una de las partículas por separado varíen con el tiempo, su suma vectorial permanece constante.

Esta constancia del vector momento angular equivale a la constancia de tres magnitudes escalares, una con respecto a cada eje de referencia.

2.8.1. DESCOMPOSICION DEL MOMENTO ANGULAR TOTAL

2.9. CONSERVACION DE LA ENERGIA TOTAL DEL SISTEMA

2.9.1. ENERGIA CINETICA DE UN SISTEMA DE PARTICULAS.

Ya que la energía cinética es una magnitud escalar, la energía -

cinética de un sistema de partículas será la suma aritmética de las energías cinéticas individuales.

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2$$

Expresamos esta energía cinética del sistema en Términos relativos al centro de masas, La posición de la partícula i -ésima respecto al centro de masas será,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}$$

donde \vec{r} es el vector de posición del centro de masas. La velocidad relativa de esa partícula i -ésima respecto al centro de masas es:

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}$$

Llevándolo a la expresión de la energía cinética.

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}})^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}^2 + \sum_i m_i \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

veamos un poco el tercer sumando. El vector de posición del centro de masas venia dado por,

$$M\vec{r} = \sum_i m_i \vec{r}_i \quad \text{como es } \vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r} \text{ sustituyendo}$$

$$M\vec{r} = \sum_i m_i (\vec{r}'_i + \vec{r}) = \sum_i m_i \vec{r}'_i + M\vec{r} \quad \text{luego}$$

$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = \sum_i m_i \vec{r}'_i = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}'_i = 0$$

con ello vemos que el tercer sumando se nos anula y queda ya finalmente

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}^2$$

que podemos interpretar diciendo que la energía cinética de un sistema de partículas se puede descomponer en dos términos: uno la energía cinética del centro de masas

$$T_1 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}^2$$

y otro la energía cinética de las partículas en su movimiento respecto al centro de masas.

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

2.9.2. TRABAJO DESARROLLADO POR UN SISTEMA DE PARTICULAS

Según habíamos visto anteriormente, el trabajo desarrollado por una partícula era igual a la variación de energía cinética de la misma. Esto es

$$W_{12} = T_2 - T_1$$

Si tomamos ahora un sistema de partículas podemos sumar el trabajo realizado por cada una y ver entonces el trabajo total desarrollado por el sistema.

$$\text{Será entonces. } \sum_i (W_{12})_i = \sum_i \left[(T_i)_2 - (T_i)_1 \right]$$

Este trabajo será el debido a la suma del realizado por las fuerzas exteriores mas el de las interiores. Esto es.

$$(W_{12})_i = (W_{12})_{ii} + (W_{12})_{ij}$$

(con el mismo convenio de rotación que antes). Y si

$$\sum (W_{12})_{ii} = W_{\text{ext}} \quad \sum (W_{12})_{ij} = W_{\text{int}} \quad \text{queda}$$

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = (T_0)_2 - (T_0)_1$$

Luego se sigue verificando que el trabajo realizado por la totalidad de las fuerzas exteriores e interiores es igual a la variación de energía cinética del sistema.

2.9.3. CASO DE CAMPOS CONSERVATIVOS

Supongamos ahora que todas las fuerzas actuantes, tanto exteriores como interiores, son conservativas. Podemos expresar entonces los trabajos en función de energías potenciales como vimos en el caso de una sola partícula. Estas energías potenciales podrán proceder de dos fuentes: una del sistema total considerado frente al mundo físico que le rodea y otra, debido a las fuerzas interiores, de unas partículas con respecto a otras. Podremos hablar así de energía potencial externa del sistema, cuya variación se deberá al trabajo realizado por las fuerzas exteriores y de energía potencial interna del sistema, cuya variación se deberá al trabajo realizado por las fuerzas interiores. Así será:

$$W_{\text{ext}} = (V_e)_2 - (V_e)_1$$

$$W_{\text{int}} = (V_i)_2 - (V_i)_1$$

y sustituyendo en

$$T_2 + (V_e)_2 + (V_i)_2 = T_1 + (V_e)_1 + (V_i)_1$$

Nueva expresión del principio de la conservación de la energía - mecánica total (cinética, potencial externa y potencial interna) cuando sobre un sistema de partículas solo actúan fuerzas exteriores e interiores que son conservativas.

2.10 DINAMICA DE ROTACION DE UN CUERPO RIGIDO

Por cuerpo rígido entendemos aquel sistema de partículas en el que la distancia entre las mismas permanece invariable cuando se le somete a la acción de fuerzas externas. Habrá de exigirse pues que el cuerpo sea rígido e indeformable y que eliminemos la posibilidad de que esté sometido a vibraciones. Como siempre, el cuerpo rígido es una idealización de los cuerpos reales, que, sin ser rígidos, se aproximan bastante.

En el caso que vamos a estudiar supondremos que el sólido permanece obligado a moverse alrededor de un eje fijo con un movimiento de rotación en torno a él. Dos conceptos que habremos de usar serán las de velocidad y aceleración angulares. Naturalmente las tres leyes de Newton se seguirán verificando y podrán aplicarse para desplazamientos infinitesimales, que podremos considerar segmentos rectilíneos. Recordemos brevemente que la velocidad angular venía definida por

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

donde θ es el ángulo girado y ω un vector dado por la regla del sacacorchos y según la dirección del eje de giro. La aceleración por

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

que también es magnitud vectorial.

Las relaciones entre estas magnitudes angulares y las lineales eran

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

siendo \vec{r} el vector de posición de la partícula, cuya \vec{v} buscamos, con respecto al eje de giro. ω será constante para todo el sólido y \vec{v} variará según varíe el radio. La variará, para un radio fijo, además debido a dos aceleraciones diferentes: una que únicamente le cambia de dirección y sentido, pero no de módulo; es la aceleración radial o centrípeta de valor.

$$A_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

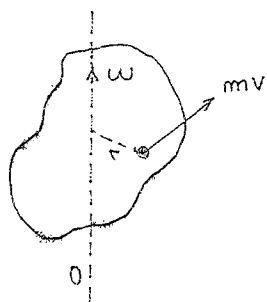
y otra que la cambia de módulo, que es la tangencial de valor modular.

$$A_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times r = \alpha \times r$$

o en rotación vectorial

$$\vec{a}_r = \ddot{\alpha} \times \vec{r}$$

La principal ventaja de la introducción de variables angulares reside en el hecho de que son constantes para todas las partículas del sólido, por lo -- que solo con la introducción de α y ω conoceremos el movimiento del mismo como un todo. Interesa pues expresar los conceptos de energía cinética, momento angular y otros vectores antes en función de estas nuevas variables.



2.10.1. ENERGIA CINETICA DE ROTACION

Podemos tomar la energía cinética de cada partícula y sumar. Esta su ma dará la energía cinética total en el sólido. Será

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 r_i^2 \quad \text{y como } V_i, \omega_i = \omega$$

$$T = \frac{1}{2} \omega \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega$$

habiendo llamado a $I = \sum m_i r_i^2$ momento de inercia del cuerpo. Si se tratase de un sólido con distribución continua de masa la sumatoria pasaría a integral y quedaría

$$I = \int r^2, dm$$

expresión general que nos dará el momento de inercia de un cuerpo que gira en torno a un eje.

2.10.2. MOMENTO CINETICO RESPECTO AL EJE DE ROTACION

Apliquemos lo que vimos en 2.8, con las nuevas definiciones del apartado anterior. Allí habíamos encontrado que para un sistema de par tículas se verificaba

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

donde \vec{L} era. $\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{P}_i$

y $\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{ii}$

con M como momento total resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema. Efectuando la derivación con respecto al tiempo y teniendo en cuenta que

$$\vec{P}_i = m_i \omega \times \vec{r}_i$$

y que al ser

$$a \times b \times c = (a \cdot c) b - (a \cdot b) c \quad \text{quedará}$$

$$L = \sum \bar{r}_i \times \bar{P}_i = \sum \bar{r}_i \times m_i \bar{\omega} \times \bar{r}_i = \sum m_i \bar{r}_i \times \bar{\omega} \times \bar{r}_i =$$

$$= \sum m_i \left[(\bar{r}_i \cdot \bar{r}_i) \bar{\omega} - (\bar{r}_i \cdot \bar{\omega}) \bar{r}_i \right] = \sum m_i r_i^2 \bar{\omega} = \bar{\omega} \sum m_i r_i^2 = \bar{\omega} I$$

ya que \bar{r}_i y $\bar{\omega}$ son perpendiculares y así $\bar{r}_i \cdot \bar{\omega} = 0$

Sustituyendo ya queda

$$\frac{dL}{dt} = M \quad \frac{d(I)}{dt} = M \quad \text{y si } \frac{dI}{dt} = 0 \text{ quedará}$$

$$I \frac{d}{dt} = M$$

ó

$$I \alpha = M$$

Esta ecuación nos indica que en la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo el momento resultante de las fuerzas exteriores respecto al eje de giro es igual al producto de inercia, respecto a ese eje, multiplicado por la aceleración angular.

2.10.3. TRABAJO REALIZADO POR LAS FUERZAS APLICADAS

Habíamos visto antes que para un sistema de partículas se verificaba que

$$W = T_2 - T_1$$

esto es, el trabajo realizado por la totalidad de las fuerzas que actúan sobre el sistema (interiores y exteriores) era igual a la variación de energía cinética del mismo. En este caso de sólido rígido que gira en torno a un eje, serán aplicables los mismos razonamientos que hicimos allí y llegamos a

$$W = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

o sea, únicamente habremos de expresar la energía cinética por su expresión en este caso

2.10.4 COMPARACION DEL MOVIMIENTO RECTILINEO Y EL ANGULAR.

Examinando las formulas que nos dan las características del movimiento rectilíneo y el angular vemos que estructuralmente son idénticas si hacemos las siguientes correspondencias.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & \Theta \\
 \dot{X} = V & \longrightarrow & \dot{\omega} = \dot{\Theta} \\
 \ddot{X} = a & \longrightarrow & \ddot{\alpha} = \ddot{\Theta} \\
 m & \longrightarrow & I \\
 F & \longrightarrow & M
 \end{array}$$

con ello, las formulas que nos dan la energia cinética, la cantidad de movimiento y la fuerza que existen en un movimiento rectilineo se transforman directamente en las que lo dan en el angular. Puede verse facilmente.

2.11. ESTUDIO DE UN SISTEMA DE DOS PARTICULAS. MASA REDUCIDA.

Consideremos el caso del movimiento de dos particulas que interaccionan, comunmente conocido por problema de los dos cuerpos

La energia potencial de la interacción de estas dos partículas dependerá solamente de la distancia entre ellas, esto es, de la diferencia de sus radio-vectores . La energia total de este sistema será entonces

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 + U(r_1 - r_2) \quad (2.11.a)$$

Si es $r' = r_1 - r_2$ el vector de posición relativa de una particula con respecto a otra, y r el del centro de masas, la expresión anterior que dará , en función de ellos, de la forma , ya que es

$$(2.11.b) \quad \left. \begin{array}{l} r_1 = r + \frac{m_2}{m_1 + m_2} r' \\ r_2 = r - \frac{m_1}{m_1 + m_2} r' \end{array} \right\} \text{ que sustituidos en la energía da}$$

$$E = \frac{1}{2} m_1 \left[\dot{r}^2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \dot{r} \dot{r}' + \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}'^2 \right] + \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{r}^2 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \dot{r} \dot{r}' + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}'^2 \right] + U(r)$$

$$E = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{r}'^2 + U(r) \quad (2.11.c)$$

Tomemos como sistema particular de referencia aquel que su origen coincide precisamente con el centro de masas. $r = 0$ y queda.

$$E = \frac{1}{2} m r'^2 U(r) \quad (2.11.d.)$$

donde $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ se denomina masa reducida del sistema. Vemos --

que la expresión de la energía es formalmente idéntica a la de una partícula de masa m moviéndose en un campo externo $U(r)$ simétrico en torno a un origen fijo. Por ello el problema del movimiento de dos partículas que interaccionan es equivalente al del movimiento de una partícula en un campo externo dado $U(r)$. De la solución $r = r(t)$ de este problema, los caminos $r_1 = r_1(t)$ y $r_2 = r_2(t)$ de las dos partículas por separado, relativos a sus centro común de masas, se obtendrá por medio de las formulas. (2.11.b.)

Veamos el caso común de que una de las masas es mucho mayor que la otra. En este es el caso de los movimientos planetarios y de átomos atómicos. Entonces si es $m_2 \gg m_1$ quedará aproximadamente (recuerde-- sé que $r=0$)

$$r_1 \approx r' \quad r_2 \approx \frac{m_1}{m_2} r'$$

como $m_2 \gg m_1 \Rightarrow r_1 \gg r_2$ esto es, el centro de masas está más -- proximo a la masa mayor. Como la masa reducida se puede poner tambien como

$$m = \frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \approx m_1$$

esto es, tiende a la masa mas pequeña.

Debido a todo esto, cuando consideramos el caso del movimiento de la Tierra en torno al Sol lo describimos como si estuviese este último estacionario y fuera solo la Tierra la movil a su alrededor. Vemos que el problema de las dos partículas ha quedado reducido al de una única partícula y un centro atractivo fijo. Es lo que vendrá representado por un campo central.

2.8.1. DESCOMPOSICION DEL MOMENTO ANGULAR TOTAL

Hemos visto que el momento angular de un sistema podriamos expresarlo en la forma

$$L = \sum_i r_i \times m_i v_i$$

tratemos de expresarlo en funcion del vector de posición del centro de masas y y del de una partícula con respecto al mismo, esto es será

$$\vec{r}_i = \vec{r} + \vec{r}'_i$$

sustituyendo

$$L_s = \sum (r + r'_i) \times m_i \dot{(r + r'_i)}$$

y como

$$\sum r \times m_i \dot{r} = r \times M \dot{r}$$

$$\text{con } M = \sum m_i$$

$$\sum r \times m_i \dot{r}'_i = \sum r'_i \times m_i \dot{r} = 0 \quad (\text{según veremos en 2.9.1.})$$

podemos poner.

$$\boxed{L_s = L_c + L'}$$

donde $L_c = r \times M \dot{r}$ es el momento del sistema, considerado como un todo y que se moviera según la ley con que lo hace el centro de masas y toda la masa concentrada en él. Es lo que podremos llamar momento angular orbital.

$L' = \sum r'_i \times m_i \dot{r}'_i$ es el momento angular del sistema, tomando como punto fijo el centro de masas y que expresa por tanto el movimiento del conjunto de partículas en relación con el punto representado del mismo que hemos tomado y al que hemos designado como centro de masas. Es el momento angular de spin.

T E M A I I I

COLISIONES ENTRE PARTICULAS

3.1. PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA.

Entendemos en general por colisión el fenómeno de hacer parar una partícula muy cerca de otra, de tal forma que ambas noten perfectamente su mutua presencia. En algunos casos, la colisión puede llegar a ser contacto real, esto es, llegar a un verdadero choque. Pero en general, no deberemos restringirnos a este último caso sino plantearlo en el más amplio sentido.

Para un estudio totalmente exacto del problema habríamos de conocer, en primer lugar, las masas y las velocidades, antes de la colisión de las dos partículas que intervienen en el fenómeno. A continuación, necesitamos conocer las fuerzas que actúan sobre las partículas en el momento del choque. Con estos datos, podríamos llegar a la descripción del fenómeno, en cuanto a las velocidades de las partículas se refiere, después de la colisión planteando las correspondientes ecuaciones del movimiento. Ahora bien, estas fuerzas que aparecen en el momento del choque son muy difícilmente conocibles por lo que este camino por lo general nunca será seguido.

Ahora bien, las fuerzas que intervienen en el choque son desconocidas en cuanto a sus características particulares pero no en cuanto a su índole general. Sabemos que son fuerzas internas al sistema de partículas y que por tanto vendrán incluidas dentro del tercer principio de la Mecánica; serán fuerzas de acción y reacción. Lleva consigo esto el que la resultante será nula y por tanto se conservará la cantidad de movimiento del sistema según vimos en el Tema anterior. De esta forma, con la primera herramienta con que contaremos será con el principio de conservación de la cantidad de movimiento.

La segunda de que dispondremos será el principio de conservación de la energía total del sistema. Y dentro de esta energía total habrá que hacer intervenir toda la que entre en juego, esto es tanto las cinéticas propias de las partículas, cómo la que pueda transformarse en calor por efecto del choque o que se radie en el movimiento, o la interna de las dichas partículas en juego. Según el tipo de colisión que consideremos, una de ellas será más importante que las demás y podrán despreciarse estas últi-

mas. Ya veremos en cada caso como podrá aplicarse la ley de conservación de la energía y si es posible su aplicación.

Una vez ya en presencia de una colisión entre partículas cabe estudiar las etapas en las que se produce la misma. Y estas son principalmente dos; una primera en la que empieza la influencia de una sobre otra hasta que se produce su valor máximo (en el caso de contacto físico, esta influencia vendria señalada por una cierta deformación de los cuerpos tratados). La segunda vendria señalada por la aparición de las reacciones que tenderian a separar los cuerpos (y a recobrar su forma primitiva en el caso de contacto) de una forma más o menos total.

En el momento del choque, los cuerpos podemos suponer no cambian sensiblemente de lugar. El tiempo del choque será así mismo muy reducido. Esto obligará a que, como veremos luego, las fuerzas que intervienen son muy intensas.

Con relación al nombre asignado a cada tipo de colisión, un primero puede ser el que nos de idea de la situación de los cuerpos con relación al, mismo. La perpendicular al plano tangente común a los dos cuerpos en el momento de la colisión se la llama línea de colisión. Si esta contiene a los centros de masas de las dos, la colisión se denominará choque central; en el caso contrario, choque excéntrico. Si las direcciones en que se mueven los centros de masas de los dos cuerpos coinciden con la línea de choque, este es directo; en el caso contrario, es oblicuo.

Finalmente solo nos queda hablar ya de los cuerpos que intervienen en la colisión y su comportamiento con respecto a la misma. Denominaremos blandos o totalmente inelásticos a aquellos que después de la colisión (si ha sido choque) permanecen unidos en su movimiento, sin recuperar su forma primitiva. Serán elásticos aquellos que recuperan totalmente su forma primitiva. Y finalmente llamaremos naturales a todos los demás.

Queda ahora ver hasta qué punto nos encontraremos en condiciones de determinar con toda precisión el movimiento de los cuerpos después de la colisión sin conocer las fuerzas que han intervenido en ella. Hemos dicho que nuestras herramientas serán los dos principios de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento. Un sistema de dos partículas requiere el conocimiento de las seis componentes de las \vec{P} después, para que queden determinadas totalmente. Mas de ambos principios solo obtenemos cuatro condiciones por lo que del estado final habremos de especificar dos magnitudes. "

Lo normal en este caso es dar al vector unitario de la dirección de una -- de las partículas o el ángulo que la velocidad de una forma con su velocidad antes del choque.

3.2. SISTEMAS DE REFERENCIA

Para el estudio de las colisiones, igual que para el de todo problema físico, será conveniente tomar como, sistema de referencia aquel en el cual la descripción del fenómeno sea lo más sencilla posible.

El planteamiento mas general sería tomar unos ejes absolutos, independientes del fenómeno y tomarlos como referencia para su estudio, Este sistema, que denominaremos Sistema Laboratorio y designaremos por L, presenta el inconveniente de que, en general, todas las partículas - antes y después de la colisión, tendrán unas ciertas velocidades. y lo mismo ocurrirá con su centro de masas que, si suponemos que una de las partículas permanece en reposo antes de la colisión se moverá con respecto al sistema L con una velocidad

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1}{m_1 + m_2}$$

siendo $\dot{\mathbf{r}}_1$ la velocidad de la partícula de masa m_1 relativa a la segunda de masa m_2 . Como hemos supuesto que la de m_2 está en reposo con respecto a L, también será $\dot{\mathbf{r}}_1$ la velocidad de m_1 con respecto al mismo L.

Mas ocurre que, como hemos dicho antes, todas las fuerzas que intervienen son interiores al sistema, por lo que según vimos en el tema anterior el movimiento del centro de masas permanecerá invariable. Si le tomamos como origen de un nuevo sistema de coordenadas, sistema que denominaremos centro-de-masas o sistema C, todas nuestras ecuaciones se verán notoriamente simplificadas ya que eliminaremos esa velocidad de arrastre del centro de masas. Y además concurre el hecho de que al estar en reposo el centro de masas, se cumple

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = 0$$

esto es, la cantidad de movimiento del sistema de dos partículas es nula antes y después con respecto a ese sistema C.

3.3.- CASO GENERAL DE CHOQUE. CHOQUE PERFECTAMENTE INELASTICO.

Consideraremos en primer lugar el caso de colisión en que hay un verdadero choque, esto es, un contacto físico. No haremos de momento ninguna suposición de que sea elástico o inelástico, sino que lo trataremos con la mayor generalidad posible.

Si son $\bar{\mathbf{v}}_1$ y $\bar{\mathbf{v}}_2$, y $\bar{\mathbf{v}}'_1$ y $\bar{\mathbf{v}}'_2$ las velocidades de las partículas m_1 y m_2 an-

tes y despues del choque respectivamente, por la conservación de la cantidad de movimiento, tendremos

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = m_1 \bar{v}'_1 + m_2 \bar{v}'_2 \quad \text{ó}$$

$$m_1 (\bar{v}_1 - \bar{v}'_1) = - m_2 (\bar{v}_2 - \bar{v}'_2) \quad (3.3.a)$$

con respecto a la conservación de la energía, podremos poner que

$$\frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \bar{v}'_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}'_2^2 + Q$$

representado por Q toda forma de nergia que no sea cinética y que aparezca despues de la colision, como puede ser calorifica. La expresión anterior podrá ponerse tambien como

$$m_1 \bar{v}_1^2 + m_2 \bar{v}_2^2 \geq m_1 \bar{v}'_1^2 + m_2 \bar{v}'_2^2$$

$$m_1 (\bar{v}_1^2 - \bar{v}'_1^2) \geq - m_2 (\bar{v}_2^2 - \bar{v}'_2^2) \quad (3.3.b.)$$

La continuación del problema, por este camino según el sistema L, se complica a partir de ahora de una forma bastante notoria. Nos convendrá introducir el sistema C donde el fenómeno es más sencillo en su descripción. Para ello tendremos en cuenta que :

$$m_1 \bar{v}_{1c} + m_2 \bar{v}_{2c} = 0$$

siendo \bar{v}_{1c} y \bar{v}_{2c} las velocidades de las particulas m_1 y m_2 respecto al sistema C.

y como

$$\bar{v}_{1c} = \bar{v}_1 - \bar{V} \quad \bar{v}_{2c} = \bar{v}_2 - \bar{V}$$

siendo \bar{V} la velocidad del centro de masas queda

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{1c} &= \frac{m_2 (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)}{m_1 + m_2} \\ \bar{v}_{2c} &= - \frac{m_1 (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{como nuevas velocidades de las} \\ \text{particulas en el nuevo sistema.} \end{array}$$

La energía cinética del sistema será (según se vió en el -- Tema II)

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left| (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \right|^2 = \frac{1}{2} m_r \left| (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \right|^2$$

La ley de conservación de la energía, si son m'_1 y m'_2 las nuevas masas de las particulas y Q la energia ganada o perdida en el fenómeno, da

$$\frac{1}{2} m_r \left| (V_1 - V_2) \right|^2 = \frac{1}{2} m'_r \left| (V'_1 - V'_2) \right|^2 + Q \text{ con ---}$$

$$m'_r = \frac{m'_1 m'_2}{m'_1 + m'_2}$$

como $m'_1 V'_{1c} + m'_2 V'_{2c} = 0$ y $V'_{1c} = V'_1 - V'$ $V'_{2c} = V'_2 - V'$ queda

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}'_{1c} &= \frac{m'_2 (\bar{V}'_1 - \bar{V}'_2)}{m'_1 + m'_2} \\ \bar{V}'_{2c} &= - \frac{m'_1 (\bar{V}'_1 - \bar{V}'_2)}{m'_1 + m'_2} \end{aligned} \right\}$$

Como nuevas velocidades de las partículas después del choque y en función de sus velocidades relativas en el sistema L

como puede verse de las expresiones anteriores

$$\bar{V}'_{1c} - \bar{V}'_{2c} = \bar{V}'_1 - \bar{V}'_2 = \bar{V}'_r$$

esto es conociendo la velocidad relativa de movimiento de las dos partículas, que será independiente del sistema elegido, podemos determinar perfectamente la velocidad en el sistema C de cada cuerpo.

Para pasar al sistema L. tendremos en cuenta que la velocidad del centro de masas es igual antes que después del choque por lo que, si se conoce V'_r quedará

$$\left. \begin{aligned} V'_1 &= V'_{1c} + V = \frac{m'_2 V'_r}{m'_1 + m'_2} + \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2} \\ V'_2 &= V'_{2c} + V = - \frac{m'_1 V'_r}{m'_1 + m'_2} + \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\}$$

que vemos quedan perfectamente definidas si se conocen V_1 , V_2 y V'_r .

3.3.1. CHOQUE PERFECTAMENTE INELASTICO

Vamos a particularizar lo anterior a un caso en el que -- exista una relación entre las velocidades de salida de las partículas : ambos saldrán unidas esto es, con la misma velocidad.

Para facilidad del problema supongamos que el movimiento se realiza en una única dimensión, y que las masas no se han visto afectadas por el choque, esto es, no se ha rodeado energía de forma apreciable, de manera que haya conducido a una pérdida de masa. Esto da lugar a

$$m_1 \dot{X}_1 + m_2 \dot{X}_2 = m_1 \dot{X}'_1 + m_2 \dot{X}'_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} \dot{x}_1'^2 + \frac{1}{2} \dot{x}_2'^2 + Q$$

con Q energía perdida en calor.

de manera análoga a como empezamos a proceder antes, llegaríamos a

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_1' \geq \dot{x}_2 + \dot{x}_2' \quad \text{ó}$$

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 \geq -(\dot{x}_1' - \dot{x}_2') \quad \text{que puede expresarse como}$$

$$e (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = (\dot{x}_2' - \dot{x}_1') \quad (3.3.c.)$$

siendo e lo que denominamos coeficiente de restitución y que en cada caso particular de choque tendrá un valor, valor que habrá de estar comprendido entre 0 y 1. En la expresión (3.3.c) vemos que este coeficiente, multiplicado por la velocidad relativa de acercamiento es igual a la velocidad relativa de separación.

El caso de choque inelástico se corresponde con $e=0$, esto es, cuando $\dot{x}_2' = \dot{x}_1'$ o sea, las partículas permanecen unidas después del choque. La pérdida de energía será.:

$$Q = T_1 + T_2 - T' = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1'^2 \text{ y como}$$

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = (m_1 + m_2) \dot{x}_1' \quad \dot{x}_1' = \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2}{m_1 + m_2}$$

sustituyendo arriba dará una expresión bastante complicada que de momento no vamos a explicitar.

3.4. COLISION ELASTICA

Una colisión entre dos partículas se denomina elástica cuando no envuelve cambios en sus energías internas. De acuerdo con esto, cuando apliquemos la ley de conservación de la energía a tal caso, podremos despreocuparnos de la energía interna de las partículas en juego.

Utilizaremos como antes el sistema de referencia en el que el centro de masas de las dos partículas permanece en reposo (sistema C). Las expresiones de las velocidades en tal sistema serán las dadas en 3.3.

Encontramos algunas expresiones interesantes en este sistema.

Por la ley de conservación del momento es

$$0 = \bar{p}_{1c} + \bar{p}_{2c} = \bar{p}_{1c}' + \bar{p}_{2c}' \quad \text{o sea}$$

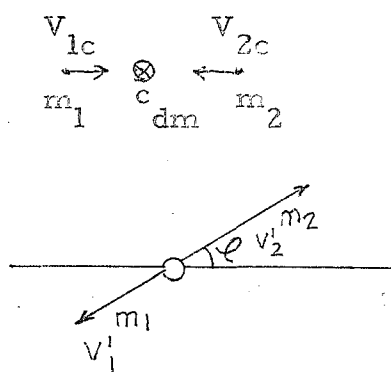
$$\bar{p}_{1c} = -\bar{p}_{2c} \quad \bar{p}_{1c}' = -\bar{p}_{2c}' \quad (3.4.a.)$$

esto es los momentos de las dos partículas permanecen iguales y opuestos despues de la colisión y por la ley de conservación de la energía

$$\frac{P_{1c}^2}{2m_1} + \frac{P_{2c}^2}{2m_2} = \frac{P'_{1c}^2}{2m_1} + \frac{P'_{2c}^2}{2m_2} \quad \text{que por (3.4.a.)}$$

$$P_{1c}^2 = P'_{1c}^2 \quad P_{2c}^2 = P'_{2c}^2 \quad (3.4.b.)$$

esto es las cantidades de movimiento de cada partícula permanecen así mismo invariantes en magnitud antes y despues de la colisión. Por ello, en el sistema C la colisión lo único que hace es rotar las velocidades un cierto ángulo



Según (3.4.b.) habrá de ser

$$v_{1c}^2 = v'_{1c}^2 \quad \text{ó} \quad |v_{1c}| = |v'_{1c}|$$

$$v_{2c}^2 = v'_{2c}^2 \quad \text{ó} \quad |v_{2c}| = |v'_{2c}|$$

Un observador situado en el CdM lo único que notaría después de la colisión es que las partículas han variado las direcciones de su movimiento pero no vería ninguna variación en su magnitud.

Si designamos por \bar{n} un vector unitario en la dirección de la partícula m_1 después de la colisión, las velocidades de las dos partículas serán.

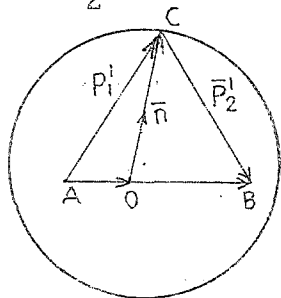
$$\bar{V}'_1 = \frac{m_2 v \bar{n}}{m_1 + m_2} \quad \bar{V}'_2 = - \frac{m_1 v \bar{n}}{m_1 + m_2} \quad \text{con } v = |\bar{V}_1 - \bar{V}_2| \quad (3.4.c.)$$

En el sistema L sería

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}'_1 &= \frac{m_2 v \bar{n}}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 \bar{V}_1 + m_2 \bar{V}_2}{m_1 + m_2} \\ \bar{V}'_2 &= - \frac{m_1 v \bar{n}}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 \bar{V}_1 + m_2 \bar{V}_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.4.d.)$$

De las leyes de conservación como hemos dicho antes, ninguna información mas puede obtenerse ya. La dirección del vector \bar{n} depende de la Ley de interacción de las partículas y su posición relativa durante la colisión.

$$\begin{aligned}\bar{P}_1' &= m_1 \bar{v} + m_1 (\bar{P}_1 + \bar{P}_2) / (m_1 + m_2) \\ \bar{P}_2' &= -m_1 \bar{v} + m_2 (\bar{P}_1 + \bar{P}_2) / (m_1 + m_2)\end{aligned}\quad (3.4.e.)$$



$$\overrightarrow{OC} = m\bar{V}$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\bar{P}_1 + \bar{P}_2)$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\bar{P}_1 + \bar{P}_2)$$

fig. 3.4.α.

donde $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ es la masa reducida -. Dibujemos un círculo de radio mv y usemos la construcción mostrada en la figura (3.4.α) . Si el vector \bar{n} tiene la dirección de oc , los vectores AC y CB dan -- los momentos P_1' y P_2' . Cuando \bar{P}_1 y \bar{P}_2 son dados , el radio del círculo y -- los puntos A y B son fijos, pero el C puede encontrarse en cualquier parte del -- círculo .

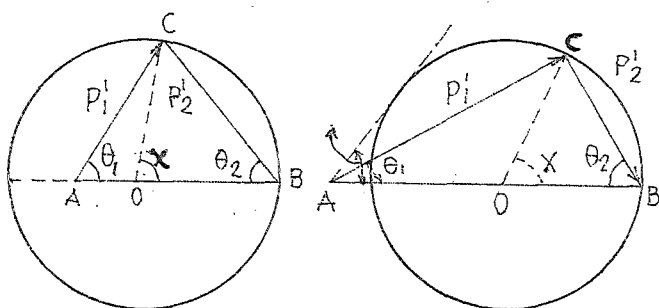
Consideramos con mas detalle el -- caso de que una de las dos partículas, -- sea la m_2 por ejemplo, se encuentre en --

reparo antes de la colisión. En este caso

$$|OB| = \frac{m_2 P_1}{m_1 + m_2} = mv \text{ luego } B \text{ está en el círculo.}$$

El vector AB es igual a la P_1 de la partícula m_1 antes de la colisión. El punto A está dentro o fuera del círculo según $m_1 < m_2$ --

o $m_1 > m_2$. Los diagramas correspondientes puede verse en la figura 3.4.β



(i) $m_1 < m_2$

(ii) $m_1 > m_2$

$$\overrightarrow{AB} = \bar{P}_1 \quad \frac{AO}{OB} = \frac{m_1}{m_2}$$

Fig. 3.4.β

Los angulos Θ_1 y Θ_2 en estos diagramas son los angulos entre las direcciones de movimiento después de la colisión y la dirección de impacto, esto es la de \bar{P}_1 . El ángulo X del centro, da la dirección de \bar{n} , y no es otro que el ángulo -- con la dirección de movimiento de m_1 -- gira en el sistema C . Es evidente de la figura que los angulos Θ_1 y Θ_2 son.

$$\operatorname{tg} \Theta_1 = \frac{m_2 \operatorname{sen} x}{m_1 + m_2 \cos x}$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{2} (\pi - x)$$

Igualmente se pueden dar las fórmulas para las magnitudes de las velocidades de las partículas después de la colisión, igualmente expresadas en función de x .

$$v_1' = \frac{\sqrt{(m_1^2 + m_2^2 + 2 m_1 m_2 \cos \chi)}}{m_1 + m_2} v$$

$$v_2' = \frac{2 m_1 v}{m_1 + m_2} \sin \frac{\chi}{2}$$

La suma $\Theta_1 + \Theta_2$ es el ángulo entre las direcciones de movimiento de las partículas después de la colisión. Evidentemente $\Theta_1 + \Theta_2 > \frac{\pi}{2}$

si $m_1 < m_2$ y $\Theta_1 + \Theta_2 > \frac{\pi}{2}$ si $m_1 > m_2$.

Cuando las dos partículas se mueven después en la misma dirección o en sentido contrario, (choque frontal) tenemos $\chi = \pi$, esto es, el punto C se encuentra en el diámetro que pasa por A.

En este caso, las velocidades después de la colisión son

$$\bar{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \bar{v}_0 \quad \bar{v}_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \bar{v}$$

Este valor de \bar{v}_2' es el mayor posible y por ello, la máxima energía que puede adquirirse es una colisión, por una partícula en reposo es

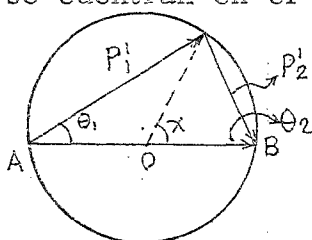
$$E_{2 \max}' = \frac{1}{2} m_2 v_{2 \max}'^2 = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1$$

donde $E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$ es la energía inicial de la partícula incidente.

Si $m_1 < m_2$, la velocidad de m_1 después de la colisión puede tener cualquier dirección. Si $m_1 > m_2$, sin embargo, esta partícula puede ser deflectada solamente a través de un ángulo que no excede de Θ_{\max} de una dirección inicial; este máximo valor de Θ_1 corresponde a la posición de C para la que AC es tangente al círculo. Evidentemente

$$\sin \Theta_{\max} = \frac{OC}{OA} = \frac{m_2}{m_1}$$

La colisión de dos partículas de igual masa, de las que una está inicialmente en reposo, es especialmente simple. En este caso, ambas B y A se encuentran en el círculo y queda



$$\Theta_1 = \frac{\chi}{2} \quad \Theta_2 = \frac{1}{2} (\pi - \chi)$$

$$\bar{v}_1' = \bar{v} \cos \frac{\chi}{2} \quad \bar{v}_2' = \bar{v} \sin \frac{\chi}{2}$$

Fig. 3.4. γ

después de la colisión las partículas se mueven en dirección perpendicular. En el caso particular de choque de frente sería $x = \pi$ con lo que

$$\Theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \Theta_2 = 0 \quad v_1' = 0 \quad v_2' = v$$

esto es, las partículas intercambian simplemente sus velocidades, quedándose la una en reposo y la otra adquiriendo el movimiento que tenía la primera con su misma dirección y sentido.

3.5. DESINTEGRACION DE PARTICULAS

Este caso, que denominaremos "desintegración espontánea" puede ser incluido dentro del tema general de colisiones unicamente como generalización de sistemas en los que se aplican los principios de conservación y que después del fenómeno estudiado, hay que considerar el movimiento de dos partículas. Podría ser considerado como el caso contrario de choque perfectamente inelástico: aquí de una partícula obtenemos dos, mientras que allí era de dos obtener una.

El proceso se describirá con mas facilidad en un sistema en el que la partícula primitiva está en reposo antes de la desintegración: el sistema C que en este caso tiene su origen en la única partícula primitiva. Las leyes de conservación dan

$$0 = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 \quad \bar{P}_1 = - \bar{P}_2$$

luego las partículas, como era de esperar, se mueven con sentidos opuestos y el mismo P, que designaremos, en módulo, por $|P_o|$

El principio de conservación de la energía habrá de ser aplicado ahora teniendo en cuenta las energías internas de las partículas en juego, esto es, verificar

$$E_i = E_{i1} + \frac{P_o^2}{2 m_1} + E_{i2} + \frac{P_o^2}{2 m_2}$$

donde m_1 y m_2 son las masas de las partículas resultante, E_{i1} y E_{i2} sus energías internas y E_i la de la partícula madre. La energía de desintegración será la diferencia

$$\epsilon = E_i - E_{i1} - E_{i2} = \frac{P_o^2}{2 m_1} + \frac{P_o^2}{2 m_2} = \frac{P_o^2}{2 m}$$

donde m es la masa reducida de las dos partículas y de donde, conocido , podemos determinar P_o y de él las velocidades

$$|v_1| = \frac{P_0}{m_1} \quad |v_2| = \frac{P_0}{m_2}$$

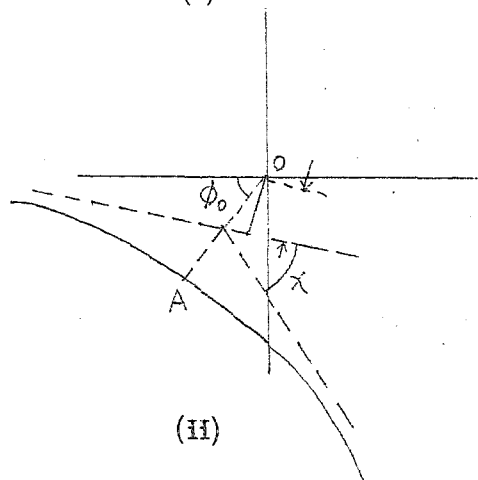
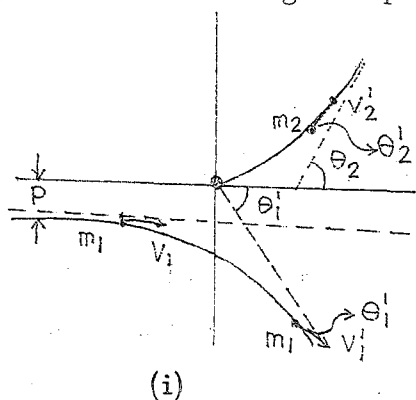
Podríamos hacer aquí ahora el paso al sistema L y tener una representación gráfica análoga a la que vimos en el choque elástico. Pero nuestro estudio va a quedar reducido a lo visto aquí.

3.6. DISPERSION.

El fenómeno de la dispersión se presenta en el caso de colisión entre dos partículas cuando entre ambas existe un cierto tipo de interacción, interacción que no es del tipo de fuerza de contacto que hemos visto hasta aquí, si no que es una cierta acción a distancia como puede ser la aparición de fuerzas eléctricas, magnéticas o gravitacionales.

Ya vimos en el Tema II que el movimiento de un sistema de dos partículas, en cuanto a una energía se refería, era equivalente al de una única, con masa la reducida de ambas y velocidad la relativa entre ellas (tomando como sistema de referencia el C), sometida a un potencial $V(r)$ cuyo centro estuviera en reposo y fuera el centro de masas de las dos partículas originales.

El estudio de la dispersión que efectuaremos será más bien, descriptivo sin meternos de lleno en su estudio analítico por ser de una notoria complejidad. Por ello nos limitaremos a expresar resultados sin indicar el camino seguido para su obtención.



(36. α)

La representación gráfica puede verse en las figuras (3.6.α,i,ii). En la primera queda representado el fenómeno tal y como sería visto en el sistema L mientras que en la segunda lo es en el sistema C . En la (i) vemos que la partícula de masa m_1 se acerca en una dirección determinada hacia la partícula m_2 , en reposo. Su línea de movimiento no coincidirá en general con la línea de unión de las partículas. La distancia P entre la recta soporte del movimiento de m_1 y la m_2 en reposo, es lo que se denomina parámetro de impacto, y dará una idea de lo directo que es la colisión. En el caso de que sea $P = 0$, se

se tratará de un choque central o de frente. Vemos que, una vez las partículas se encuentran a una distancia determinada, comienzan a aparecer fuerzas entre ambas debidas a los potenciales existentes. Comienza pues un movimiento que tenderá a separarlas. Las cantidades de movimiento se seguirán conservando por tratarse de fuerzas internas al sistema, y así podremos poner

$$\left. \begin{aligned} m_1 \bar{v}_1 &= m_1 v'_1 \cos \Theta'_1 + m_2 v'_2 \cos \Theta'_2 \\ 0 &= m_1 v'_1 \sin \Theta'_1 + m_2 v'_2 \sin \Theta'_2 \end{aligned} \right\}$$

estas velocidades v'_1 y v'_2 serán los de un instante determinado y variación de manera gradual según varíe el potencial entre ambas. En un momento cualquiera, la energía del sistema sería.

$$E = \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 + u(r_1 - r_2)$$

Las velocidades \bar{v}_1 y \bar{v}_2 variarán según varíe $u(r_1 - r_2)$. Ahora bien, llegará un momento en que, debido a la distancia $r_1 - r_2$ que las separe, esta energía potencial llegará a ser despreciable y únicamente quedarán como energías útiles las cinéticas. Podremos poner entonces

$$\frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

que junto las dos anteriores nos proporciona tres ecuaciones para cuatro incógnitas: v'_1 , v'_2 , Θ'_1 y Θ'_2 . Conocido una de ellas, podremos obtener las restantes y tener así el problema resuelto.

Con respecto al sistema C el planteamiento del problema se reduce al del movimiento de una partícula en un campo central, esto es, con fuerzas dirigidas hacia un punto fijo. Puede demostrarse que en este caso, la trayectoria que sigue la partícula es simétrica con relación a la línea que une el origen con el punto más próximo a él en el movimiento de m . La trayectoria es una hipérbola cuyas asíntotas formarán un ángulo Φ_0 con la misma. Este ángulo puede llegarse a él, y es

$$\Phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(P/r^2) dr}{\sqrt{[1 - (P^2/r^2) - (2 u/m v_{\infty}^2)]}}$$

El ángulo χ con que la partícula es girada en su trayectoria será

$$\chi = \left| \pi - 2 \Phi_0 \right|$$

P es el parámetro de impacto a que hemos aludido antes. v_∞ será la velocidad de la partícula en el infinito, esto es, cuando se considere ajena al campo. La energía cinética allí sería.

$$T = \frac{1}{2} m v_\infty^2 \quad \text{con } m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{y } v_\infty = \left| v_1' - v_2' \right|_\infty$$

Vemos de todo esto que, relacionado con P , habrá una cierta área de valor πp^2 en torno a la cual el efecto de m_2 es el mismo. Habrá un valor P , por encima del cual, la dispersión no será apreciable. Este límite nos da una sección que denominaremos sección eficaz de choque



TEMA IV

OSCILACIONES DE PEQUEÑA AMPLITUD

4.1. -- INTRODUCCION

El planteamiento del problema de las oscilaciones de pequeña amplitud puede realizarse por dos caminos diferentes, Uno, que podríamos denominar clásico, mas comunmente usado en los libros de Física y que se basa fundamentalmente en el estudio de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo o partícula que se mueve, dando lugar a las correspondientes ecuaciones de movimiento. Y otro, que es el que seguiremos aquí de potencia operatoria más amplia y que no se basa en las fuerzas, sino en las energías que puede poseer en cada punto, estas energías, caso de ser potenciales darán lugar a unas fuerzas que serán las mismas que se planteaban directamente por el primer camino. El fundamento de este último método se dió en líneas generales en el último punto del tema II.

4.2. OSCILACIONES LIBRES EN UNA DIMENSION

Dentro de los posibles movimientos que puede efectuar un sistema mecánico, uno de los más comunes es aquel en el que éste se mueve en torno a una posición de equilibrio estable repitiendo su paso por un cierto punto a intervalos regulares de tiempo, esto es, verificándose:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(t + T) = \dots = \vec{r}(t + nT)$$

donde T , o periodo del movimiento, es el tiempo que tarda en volver a pasar por el mismo punto con análogas características de velocidad. Aquí consideraremos solo el caso más sencillo de todos, esto es, aquel en el que el sistema posee un único grado de libertad y por tanto realiza un movimiento en una única dimensión.

La partícula o sistema que se mueve supongamos que se encuentra sometida a la acción de un campo que le origina una energía potencial $u(x)$ dependiendo del punto x donde se encuentra. En aquellos puntos donde esta energía tenga un mínimo se verificará que $\frac{du}{dx} = 0$ y como $F = -\nabla u =$

$-\frac{du}{dx}$ la fuerza que actuará sobre la partícula será nula y por tanto si aquella no posee ninguna energía cinética podrá permanecer allí en total reposo: será un punto de equilibrio. Un desplazamiento de éste punto originará una fuerza recuperadora de valor $-\frac{du}{dx}$ que tenderá a volver al sistema al equilibrio, ya que si el desplazamiento fue positivo, la fuerza será negativa y viceversa. Un máximo, en cambio, de $u(x)$ no será punto de equilibrio, aunque si lo puede ser de reposo ya que, en él sí será la fuerza que actúe nula, pero un desplazamiento positivo acarrea una fuerza también positiva que le alejará del mismo.

Sea x_0 el valor de la coordenada x para el que $u(x)$ tiene un mínimo. El valor de $u(x)$ en otro punto podrá obtenerse por desarrollo de Taylor y así:

$$u(x) = u(x_0) + \left[\frac{du}{dx} \right]_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2u}{dx^2} \right]_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

de este desarrollo, si los desplazamientos $(x - x_0)$ son lo suficientemente pequeños podremos prescindir de los términos de tercer grado. El segundo sumando, por otra parte, será nulo por las propiedades de u_x en x .

Con esto queda, si tomamos $u(x_0) = 0$ como energía potencial de referencia y llamamos a

$$\left[\frac{d^2u}{dx^2} \right]_{x_0} = K \text{ y } x_0 = 0 \quad u(x) = \frac{1}{2} K x^2 \quad (4.1.a.)$$

el valor de K es positivo por tratarse de un mínimo.

Así pues, la energía potencial que poseerá un sistema en un punto x , del campo $u(x)$ será la dada por (4.1.a). A esta energía quedará sumada la cinética que pueda poseer y que en general, si m es su masa, que dará

$$E = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (4.1.b)$$

Como el campo $u(x)$ es un campo eminentemente conservativo ya que se verifica según puede comprobarse la igualdad

$$u_{xy} = u_{yx} = 0$$

la energía total permanecerá constante y variará con el tiempo, de donde -

$$\frac{dE}{dt} = K x \dot{x} + m \dot{x} \ddot{x} = 0 \quad \text{que conduce a --}$$

$$K x + \ddot{x} m = 0 \quad \text{ó} \quad \ddot{x} + \frac{K}{m} x = 0 \quad (4.1.c.)$$

que nos da la ecuación de movimiento. Si ponemos $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ quedará

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

cuya solución general es:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (4.1.d.)$$

que puede ser también escrita como

$$x = a \cos (\omega t + \alpha) \quad (4.1.e.)$$

ya que $\cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha = \cos (\omega t + \alpha)$ y comparándolas se tiene:

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \text{tg } \alpha = - \frac{C_2}{C_1}$$

Así pues, cerca de la posición de equilibrio estable, el sistema ejecuta oscilaciones armónicas. El coeficiente a se denomina amplitud de las oscilaciones, y el argumento del coseno, su fase; α es el valor inicial de la fase y evidentemente depende de la elección del origen del tiempo. La cantidad ω se denomina pulsación o frecuencia circular; en los libros de física teórica se suele designar únicamente como frecuencia. Vemos, referente a esta última, que es una característica de la oscilación e independiente de las condiciones iniciales del movimiento. No es función más que de las propiedades del sistema mecánico mismo. Recalquemos de nuevo que esto solo es válido para pequeñas oscilaciones y que las de mayor amplitud las formulas serían otras al tener que considerar en el desarrollo de $U(x)$ términos de órdenes superiores.

Según puede verse directamente en (4.1.d.) el período del movimiento será .:

$$2\pi + \omega t = \omega (t + T) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Puede verse que este valor es el mismo que el que puede obtenerse aplicando la teoría expuesta al final del tema II. Allí vimos que el periodo de un movimiento oscilatorio venía dado por

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{K_1}^{K_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

aquí habría que sustituir $U(x) = \frac{1}{2} K x^2$. La integración es casi directa y conduce a un periodo que es exactamente el mismo que el obtenido.

Queda como ejercicio para el lector.

La energía total de un sistema que ejecuta estas pequeñas oscilaciones es :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

que con (4.1.e.) queda:

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \quad (4.1.f.)$$

de donde vemos que la energía es proporcional a la amplitud o viceversa. -
Esto, que graficamente se ve de una forma directa se obtiene además te- -
niendo en cuenta que la energía potencial, graficamente, es una parábola -
de ecuación

$$U(X) = \frac{1}{2} m \omega^2 X^2$$

que para $X = a$ dará un punto sobre ella donde toda la energía es potencial
y de valor la total que posea el sistema.

La dependencia con el tiempo de la posición espacial se repre--
senta a menudo como la parte real de la expresión compleja

$$X = R_e (A \exp (i \omega t))$$

donde A es la amplitud compleja de valor $A = a \exp (i \alpha)$, cuyo módulo --
es la amplitud ordinaria y su argumento la fase inicial. El uso de facto- -
res exponenciales es matematicamente más simple que el de trigonométri--
cos ya que su forma permanece invariable por la diferenciación.

4.3. OSCILACIONES FORZADAS.

Consideremos ahora el caso de que además de la energía poten-
cial considerada en el caso anterior haya otra adicional de la forma $U_e(x, t)$
debida a un campo externo al sistema. Esta energía potencial creará una -
fuerza externa variable que actuará sobre el mismo, obligándole a realizar
unas oscilaciones que denominaremos forzadas, contrariamente al caso -
anterior que las habíamos denominado libres. Estas oscilaciones seguire- -
mos suponiendo son de pequeña amplitud lo que implica que el campo exte-
rno es débil ya que si no lo fuera, los desplazamientos x tomarían valo- -
res demasiado grandes. Ya veremos que, aún tratándose de campos débi- -
les, puede llegar un caso en el que la amplitud puede llegar a ser tan -
grande como el sistema lo permita.

La energía de este sistema ahora, naturalmente, no se conse-
vará ya que el sistema gana energía de la fuente del campo externo.

Veamos la fuerza debida a dicho campo. Será como siempre
- $\left[\frac{\partial U_e}{\partial x} \right]_{x=0}$ que será, normalmente una función del tiempo y que, en
general representaremos por $F(t)$.

La energía adicional $U_e(t, x)$ puede ser desarrollada en serie -
de potencias de x , teniéndose, si nos quedamos con el primer término so-
lo del desarrollo, por ser x un desplazamiento pequeño

$$U_e(x, t) = U_e(0, t) + x \left[\frac{\partial U_e}{\partial x} \right]_{x=0} = U_e(0, t) - x F(t)$$

La total en un punto x quedará así:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2 + U_e(0, t) - x F(t)$$

aquí no podremos hacer lo que hicimos en 4.2. de derivar con respecto al tiempo e igualar a cero por lo que hemos dicho antes de ser campos, en general, no conservativos y función del tiempo. Las anteriores energías potenciales acarrearán una fuerza de valor

$$F(t) = -Kx + F(t)$$

queda, como ecuación de movimiento.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (4.3.a)$$

con ω , como antes, pulsación de las oscilaciones libres.

La solución general de (4.3.a.) se compondrá de la suma de una solución de la homogénea y una particular de la inhomogénea. La primera será la ya vista en el 4.2. La particular dependerá del tipo de $F(t)$.

El caso particular mas interesante de $F(t)$ será cuando sea de la forma

$$F(t) = F \cos(\gamma t + \beta) \quad (4.3.b.)$$

La solución particular en este caso, será de la forma $x_1 = b \cos(\gamma t + \beta)$ que sustituida en (4.3.a.) conduce a

$$b = \frac{F}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \quad \text{con lo que ya queda}$$

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{F}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta) \quad (4.3.c.)$$

las constantes a y α , dependerán de las condiciones iniciales.

Vemos que la solución se compone pues de la suma de dos oscilaciones: una con la frecuencia intrínseca del sistema y otra con la γ de la fuerza.

Esto es válido para toda γ a excepción de cuando tiene el valor $\gamma = \omega$. Simplemente con sustituir en (4.3.c) vemos que adquiere valor infinito; pero para dejar más patente la variación con el tiempo, lo podemos poner como

$$x = a' \cos(\omega t + \alpha) + \frac{F}{m(\omega^2 - \gamma^2)} (\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta))$$

donde ahora $a' \neq a$. Cuando \rightarrow el segundo sumando es de la forma %.
Resolviendo por L'Hopital la indeterminación queda

$$x = a' \cos(\omega t + \alpha) + \frac{F}{2 m \omega} t \sin(\omega t + \beta) \quad (4.3.d.)$$

que vemos indica que la amplitud de las oscilaciones crece con el tiempo. -
A este fenómeno se le da el nombre de RESONANCIA y tiene una importan-
cia muy grande cuando existen fuerzas que pueden actuar sobre un sistema.
Si la frecuencia de las mismas es la propia de éste, podría llegar a aca-
rrrear su destrucción.

4.4. OSCILACIONES AMORTIGUADAS.

Hasta aquí, aunque explícitamente no se haya dicho, hemos con-
siderado que el movimiento tenía lugar en el vacío o que el efecto del me-
dio que rodeaba al sistema estudiado, sobre este era despreciable. Ahora -
bien, en la realidad el movimiento tendrá lugar dentro de un medio físico -
que ejercerá una cierta resistencia sobre él frenando su movimiento. La -
energía del cuerpo se irá disipando y convirtiéndose en calor. El problema
deja pues de ser estrictamente mecánico para entrar así en juego otras -
magnitudes.

Existe, sin embargo, una clase de casos en los que el movimien-
to dentro de un medio puede ser descrito aproximadamente con la inclusión
de unos términos aditivos en las ecuaciones mecánicas del movimiento. Es-
tos términos aditivos consisten en lo que denominaremos fuerzas de fricción
y dependen solo de la velocidad del sistema. Para encontrar la expresión -
que usaremos, podemos desarrollar dichas fuerzas en series de potencias
de \dot{x} , con tal que ésta sea lo suficientemente pequeña. El término de orden
cero es nulo ya que no puede existir fricción cuando el cuerpo está en repo-
so. El primer término no nulo será proporcional a la velocidad y, si despre-
ciamos los de orden superior, podremos decir que la fuerza de fricción es
de la forma

$$- \alpha \dot{x}$$

donde α es un coeficiente positivo y el signo menos indica que la fuerza ac-
túa en sentido opuesto al de la velocidad. Con esto, la ecuación de movi-
miento queda

$$m \ddot{x} = - K x - \alpha \dot{x} \quad (4.4.a.)$$

dividiendo por m y llamando a $K/m = \omega_0^2$ y a $\alpha/m = 2 \lambda$
donde

ω_0 = pulsación de las oscilaciones libres en ausencia de rozamiento

λ = coeficiente de amortiguamiento

queda

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.4.b.)$$

Esta ecuación diferencial de segundo grado con coeficientes constantes tendrá soluciones de la forma $x = \exp(r t)$

donde r serán las soluciones de la ecuación característica

$$r^2 + 2r\lambda + \omega_0^2 = 0$$

esto es

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

la solución queda así

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (4.4.c.)$$

A partir de aquí, dependiendo de la relación entre λ y ω_0 podremos encontrarnos una serie de casos que vamos a estudiar brevemente.

Si $\lambda < \omega_0$ nos encontramos dos valores complejos de r . Esto da lugar a que la solución de la ecuación general de movimiento pueda ser reescrita como

$$x = \text{Re } A \exp(-\lambda t + i \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t)$$

Donde A es una constante compleja arbitraria, o como

$$x = a \exp. (-\lambda t) \cos(\omega t + \alpha) \quad (4.4.d.)$$

con $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ y a y α constantes reales. El movimiento descrito por esta fórmula consiste pues en oscilaciones amortiguadas, esto es, aquellas oscilaciones cuya amplitud decrece con el tiempo según el coeficiente

$$e^{-\lambda t}$$

La razón de decrecimiento de la amplitud viene dada por el exponente λ . Vemos que la pulsación ahora es menor que la que tendríamos en ausencia de fricción, esto es, en oscilaciones libres. Esta discriminación en la frecuencia como resultado de la fricción era de esperar desde el momento en que esta retarda el movimiento.

Si $\lambda > \omega_0$ los valores de r son ambos reales y negativos. La forma general de la solución será

$$x = c_1 \exp \left\{ - \left[\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \right] t \right\} + c_2 \exp \left\{ - \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \right) t \right\} \quad (4.4.e.)$$

vemos que ahora, cuando la fricción es lo suficientemente intensa, el movimiento consiste en una aproximación asintótica (cuando $t \rightarrow \infty$) a la posición de equilibrio. Este tipo de movimiento se denomina amortiguamiento aperiódico o superamortiguado.

Finalmente, cuando $\lambda = \omega_0$ nos encontramos ante el caso de amortiguamiento crítico, en el que la solución de la ecuación característica tiene una raíz doble de valor

$$r = -\lambda$$

La solución general de la ecuación diferencial es entonces

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\lambda t}$$

4.5. OSCILACIONES FORZADAS BAJO FRICCIÓN

La teoría de las oscilaciones forzadas bajo fricción es enteramente análoga a la dada en 4.3. para las oscilaciones sin fricción. Consideraremos únicamente aquí el caso de fuerza externa periódica, que es el que más interés presenta. La ecuación de movimiento será ahora simplemente

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t \quad (4.5.a.)$$

cuya solución será suma de la homogénea más una particular de la completa. La solución de la homogénea, vimos en 4.4, era de la forma

$$a \exp. (-\lambda t) \cos (\omega t + \alpha)$$

mientras que la de la completa será

$$b \cos (\gamma t + \delta)$$

esto es, será

$$x = a e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\gamma t + \delta) \quad (4.5.b.)$$

donde puede comprobarse es:

$$b = \frac{f}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}} \quad y \quad \tan \delta = \frac{2\lambda \gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (4.5.c.)$$

el primer sumando de esta solución vemos que crece exponencialmente con el tiempo, por lo que, después de un intervalo suficiente, solo quedará el segundo, esto es

$$x = b \cos (\gamma t + \delta)$$

vemos en (4.5.c.) que ahora cuando $\gamma \rightarrow \omega_0$ esto es, cuando nos acercamos a la resonancia, las amplitudes no incrementan su valor independientemente, sino que llegan a un valor límite que es $b = f/2m$. Mas este no es el

valor mayor que pueden tomar, que será cuando el denominador de b tenga un mínimo y esto es para

$$-2(\omega_0^2 - \gamma^2)2\gamma + 8\lambda^2\gamma = 0 \quad = \quad \omega_0^2 - 2\lambda^2$$

Para $\lambda \ll \omega_0$ vemos que ω_0 difiere solamente de γ en una cantidad infinitésima.

El estudio de las oscilaciones en este caso, a partir de aquí, se complica de una forma bastante señalada, por lo que en principio queda fuera del alcance que le intentamos dar. No continuaremos, pues, más.

4.6. RESUMEN FINAL

Todo lo visto hasta aquí tiene una importancia muy notoria por dos hechos: uno primero por tratarse de movimientos que, en la vida real, se dan de una manera frecuente y uno segundo, porque según el desarrollo en serie de Fourier, todo fenómeno aperiódico o de periodicidad no armónica, puede descomponerse en suma de movimientos armónicos, que han sido los vistos hasta aquí.

Los de movimiento armónico que se encuentran más comúnmente son aquellos en los que, en mecánica, intervienen péndulos con pequeñas elongaciones o resortes que se estiran un desplazamiento no muy grande. En los primeros, la constante K del movimiento tiene un valor que depende de la longitud del péndulo y del valor de la gravedad en el punto en que se efectúa el movimiento. Su valor exacto puede encontrarse de la definición de K que se dió anteriormente, que era

$$K = \left[\frac{d^2 U}{dx^2} \right]_{x_0 = 0}$$

Aquí será $U = mgh$ siendo h la altura con respecto al nivel de referencia; expresándola en función de la distancia a la vertical por el punto de suspensión, es, al considerar los desplazamientos, $h \approx x^2/2l$ o sea,

$$U = mg \frac{x^2}{2l} \quad \text{que derivando dos veces, resulta} \quad K = \frac{mg}{l}$$

de donde

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{ml}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{que conduce a}$$

$$T = 2\pi \frac{1}{\omega} \quad \text{de acuerdo con lo ya conocido.}$$

En el caso del muelle, la K es simplemente un parámetro de cada resorte y que normalmente deberá ser conocido experimentalmente.

El estudio realizado aquí, principalmente con energía más que con fuerzas, presenta la notable ventaja de poder ser aplicado casi sin variación a muchos otros casos no mecánicos, como pueden ser las oscilaciones de un sistema L-C en donde la aplicación de las energías que entran en juego conduce a ecuaciones por completo idénticas a las vistas en este tema.

\$. \$. \$. \$. \$. \$

TEMA V

5.1. CONSIDERACIONES GENERALES .- La teoria cinética de los gases constituye solo una rama/de la teoria molecular/ de la materia, que considera que los tres estados de "agregación, sólido, liquido y gaseoso, son esencialmente discontinuos y formados por un gran número de particulas discretas demoninadas moléculas. En los dos primeros estados las moléculas están separadas por distancias del orden de magnitud de sus diametros, esto es . del orden de algunos ängstrons, conteniendo por tanto alrededor de 10^{22} - 10^{23} atomos por cm^3 .

En el estado gaseoso, por el contrario, estan separadas por distancias muy superiores, y además variables continuamente según luego veremos.

Ya sabemos que, para estudiar el comportamiento de la materia podemos hacerlo por dos caminos : el macroscopio y el microscopio. Para seguir el primero nos basariamos unicamente en aquellas propiedades de los cuerpos que son observables, bien a simple vista, o bien con los medios de observación que a nuestro alcance tengamos. Intervienen pues los elementos sensoriales de que dispongamos y no operaremos mas que con estas cuya realidad fisica puede ser comprobada directamente. En cambio, el camino microscópico se basa en cantidades que no son directamente medible; así pueden ser por ejemplo . el número de moléculas de un gas, sus energias o sus velocidades. No son observadas directamente sino solo sugeridas. Ambos procesos, el macroscópico y el microscopico, actuando sobre un mismo cuerpo, deberán conducir a un mismo resultado , siempre claro es que sigamos un proceso estadistico por el que pasemos del micro al macroscopico.

Muchos de los fenómenos exhibidos por la materia son solo explicables admitiendo que las moléculas que la constituyen están en constante y rápido movimiento. Tales son, por ejemplo, la difusión de gases y liquidos, la evaporacion de la superficie libre de los liquidos y la tención de vapor de los sólidos. Y asi como la termodinamica es una ciencia eminentemente experimental y todas su consecuencias están deducidas sin hacer ninguna hipótesis sobre la estructura de la materia, la teoria, cinética está basada en un modelo molecular al cual aplica las leyes de la mecánica, y esto le permite explicar las propiedades macroscopicas de la materia mas allá de los alcances de la Termodinamica pura.

La teoria cinética de los gases fué establecida finéticamente por Maxwell y Clausius y ampliada psteriormente por Boltymann, Jeans y otros. Su desarrollo es mas sencillo que en el caso de los liquidos y los só-

lidos ya que la ausencia casi total de fuerzas de cohesión simplifica extraordinariamente el tratamiento analítico. Las hipótesis fundamentales del modelo molecular en que se hará la teoría cinética de los gases son las que veremos a continuación.

5.2. HIPOTESIS DEL MODELO MOLECULAR

5.2.1. Cualquier volumen finito de gas, por pequeño que lo consideremos consta de un gran número de partículas iguales que se pueden identificar con las moléculas químicas. En condiciones normales de presión y temperatura un Kílogramo mol ocupa un volumen de 224 m^3 y contiene $6,03 \cdot 10^{26}$ moléculas (número de Avogadro).

5.2.2. El diámetro de la molécula, considerada esférica, es muy pequeño comparado con la distancia que existe por término medio entre dos moléculas. Para los gases a la temperatura ambiente y presión atmosférica normal esta distancia es del orden de $3 \cdot 10^{-9} \text{ m}$, mientras que los diámetros moleculares son aproximadamente de un orden de magnitud inferior, o sea $3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. En consecuencia, las atracciones mutuas moleculares y las fuerzas de cohesión se reducen hasta anularse prácticamente.

5.2.3. Eliminadas las fuerzas de cohesión, las partículas, en ausencia de fuerzas externas, se desplazan con movimiento rectilíneo y solo modifican su dirección en los choques con otras moléculas, o con las paredes de la vasija. En consecuencia la energía de las moléculas de un gas perfecto es puramente cinética, excepto en los breves instantes en que se verifican los choques.

5.2.4. Los choques de las moléculas son perfectamente elásticas, y por tanto, se realizan sin pérdidas de energía cinética. Como veremos luego, los choques de las moléculas del gas sobre las paredes del recinto donde está contenido explican el concepto de presión. Si el volumen se reduce a la mitad el número de colisiones, u en consecuencia la presión se duplica de acuerdo con la ley de Boyle. La temperatura del gas viene determinada por la energía cinética media de las moléculas, y por tanto, un aumento de temperatura producirá choques moleculares sobre las paredes más numerosos y más intensos, es decir, se producirá un aumento de presión, todo ello de acuerdo con las leyes de los gases.

5.2.5. Se admite que en la masa gaseosa existe un caos molecular permanente, es decir, la repartición de las moléculas es absolutamente desordenada; en cada instante todo volumen finito, por pequeño que se considere, contiene aproximadamente el mismo número de moléculas. Si llamamos n

al número de moléculas por unidad de volumen, las contenidas en un volumen ΔV serán $N = n \Delta V$. Se comprende que siendo finito, aunque muy grande, el número de moléculas, si consideramos un elemento de volumen infinitamente pequeño el contenido molecular puede ser nulo, en contra de lo expuesto; por ello al hablar de volumen pequeños insistimos en que se trata de volúmenes finitos, suficientemente grandes para que el número de moléculas que contengan coincida con el valor medio y lo suficientemente pequeños para hacer la sustitución $\Delta V = dV$ que permite el empleo del cálculo diferencial.

5.2.6. De acuerdo con la hipótesis del caos molecular, las velocidades de las moléculas están distribuidas al azar. No existe ninguna dirección privilegiada en el conjunto molecular, ya que si no fuera así, el gas se desplazaría en esa dirección y a la escala macroscópica no estaría en reposo. En cuanto a las magnitudes de las velocidades, se admiten que pueden ser cualesquiera, pero la repartición de todos los valores posibles entre todas las moléculas obedece a una ley constante.

Para calcular el número de moléculas que en una masa gaseosa tienen dirección determinada tendremos en cuenta el que se cumple la hipótesis de distribución homogénea de velocidades. Por ello, en una esfera de radio r y superficie por tanto $4\pi r^2$, si hay N posibles velocidades la densidad de velocidades por unidad de superficie será $N/4\pi r^2$ y en un elemento de superficie dS

$$dN = \frac{N}{4\pi r^2} dS.$$

expresándolo en coordenadas polares $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$, el número de moléculas con velocidades de dirección comprendidas entre θ y $\theta + d\theta$ y ϕ y $\phi + d\phi$ será:

$$d^2 N = \frac{N}{4\pi} \sin \theta d\theta d\phi$$

y por unidad de volumen será:

$$d^2 n_{\theta\phi} = \frac{n}{4\pi} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (5.2.a)$$

5.3. INTERPRETACION CINETICA DE LA PRESION.

Como ya se anticipó en la sección anterior, la presión de un gas sobre las paredes del recipiente que le contiene es debida a los choques

incesantes de las moléculas gaseosas sobre las mismas. Como estos choques son perfectamente elásticos, si una molécula incide sobre la pared con una velocidad v y formando esta un ángulo θ con la normal, como la pared se puede considerar de masa infinita, la variación de la componente tangencial de la cantidad de movimiento será nula, mientras que la normal será:

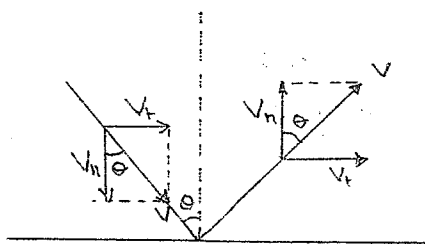


fig (5.3.a).

$$\Delta (m V)_n = m V \cos \theta - (-m V \cos \theta) = 2 m V \cos \theta. \quad (5.3.a)$$

esta variación de cantidad de movimiento se corresponderá con un impulso mecánico que, si el tiempo que dura el choque es τ y es \overline{F} la fuerza media que actúa durante el mismo será :

$$\overline{F} \tau = 2 m V \cos \Theta$$

Para determinar la presión ., habrá que sumar los impulsos recibidos por la pared por unidad de tiempo y unidad de superficie, procedentes de moléculas que inciden de todas direcciones y con todas las velocidades. Para ello, calculemos en primer lugar el número total de choques que tienen lugar en el tiempo τ sobre un elemento de superficie dS procedentes de la dirección $\Theta\varphi$ (o sea, entre Θ y $\Theta + d\Theta$, y φ y $\varphi + d\varphi$) y con velocidad v . Este número coincidirá con el número de moléculas contenido en un cilindro oblicuo de aristas en la dirección $\Theta\varphi$ y longitud v .

Si llamamos dn_v al número de moléculas por unidad de volumen con velocidades entre v y $v + dv$, de acuerdo con (5.2.a), el número de éstas, que además forman ángulos Θ y φ , serán :

$$d^3 n_{\Theta\varphi v} = \frac{dn_v \sin\Theta \, d\Theta \, d\varphi}{4\pi}$$

y como el volumen del cilindro oblicuo es $dV = dS v \tau \cos\Theta$, el número total de moléculas de las condiciones expuestas y que chocará sobre dS en el tiempo τ será.:

$$d^3 n_{\Theta\varphi v} dV = dS \tau \frac{v \, dn_v}{4\pi} \sin\Theta \cos\Theta \, d\Theta \, d\varphi \quad (5.3.b)$$

Por consiguiente, la variación de cantidad de movimiento debida a todas estas colisiones se obtendrá multiplicando la ecuación anterior por $2m v \cos\Theta$

$$\Delta G = \frac{\tau dS}{2\pi} m V^2 \, dn_v \sin\Theta \cos^2\Theta \, d\Theta \, d\varphi$$

Extendiendo este resultado a todas las velocidades y todos los ángulos posibles será:

$$\begin{aligned} G &= \frac{m \tau dS}{2} \int_0^\infty v^2 \, dn_v \int_0^{\pi/2} \sin\Theta \cos^2\Theta \, d\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{m \tau dS}{3} \int_0^\infty v^2 \, dn_v \end{aligned}$$

ya que :

$$\int_0^{\pi/2} \sin \Theta \cos^2 \Theta d\Theta = \left[-\frac{\cos^3 \Theta}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} ; \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

La presión será el valor de G para $\tau = 1$ y $dS = 1$, o sea:

$$\rho = \frac{1}{3} m \int_0^{\infty} v^2 dn_v$$

y si llamamos $\overline{v^2}$ a la velocidad cuadrática media:

$$\overline{v^2} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v^2 dn_v \quad (5.3.c)$$

admitiendo una distribución continua de velocidades en el caos molecular la ecuación anterior se convierte en

$$\rho = \frac{1}{3} m n \overline{v^2} \quad (5.3.d)$$

ecuación de gran importancia y ya que relaciona una propiedad macroscópica y observable como es la presión de un gas con las propiedades de sus moléculas. Si tenemos en cuenta que el producto mn representa la densidad del gas resulta:

$$\rho = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2} \quad (5.3.c)$$

Hay que tener en cuenta que la velocidad cuadrática media de las moléculas definida como el valor medio de los cuadrados de las velocidades no coincide con el cuadrado de \overline{v} de la velocidad media de la moléculas. Esta última se define como el valor medio de las velocidades de las moléculas.

$$\overline{v} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v dn_v \quad (5.3.F)$$

5.4. ENERGIA CINETICA MEDIA DE TRASLACION

Llamando N al número total de moléculas contenidas en el volumen V será $n = N/V$ y la ecuación (5.3.d) tomará la forma

$$pV = \frac{1}{3} mN \overline{v^2} \quad (5.4.a)$$

que podemos comparar con la ecuación de los gases perfectos:

$$pV = n_o RT = \frac{N}{N_A} RT = NkT \quad (5.4.b)$$

en donde $k = R/N_A = 8,31 \cdot 10^3 / 6,03 \cdot 10^{26} = 1,38 \cdot 10^{-23}$ joules/grad es una constante universal llamada constante de Boltzman.

Así resulta, igualando

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} K T \quad (5.4.c)$$

ecuación que nos dice que la temperatura absoluta T del gas es proporcional a la velocidad cuadrática media de las moléculas. Al cero absoluto correspondería inmovilidad molecular. La ecuación anterior puede escribirse también en la forma:

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2}_{\text{media}} = \frac{3}{2} K T \quad (5.4.d)$$

es decir la energía cinética/de traslación es proporcional a la temperatura absoluta del gas y no depende para nada de su naturaleza ni tampoco de los valores de la presión o del volumen. Obsérvese que desde el punto de vista cinético-molecular la temperatura es una propiedad del conjunto de las moléculas, resultando ser proporcional a la energía cinética media, y por tanto no tiene sentido utilizar la ecuación anterior para definir la temperatura de una molécula.

5.5. HIPOTESIS DE AVOGADRO

La hipótesis de Avogadro, que afirma, que volúmenes iguales de gases a igual temperatura y presión contienen números iguales de moléculas, resultan evidente a partir de la teoría cinética. En efecto, aplicando la ecuación (5.4.a) a dos gases que en igual volumen contienen, respectivamente n_1 y n_2 moléculas de masas m_1 y m_2 a igual presión p , resulta:

$$\left. \begin{aligned} pV &= \frac{1}{3} m_1 N_1 \overline{v_1^2} = \frac{2}{3} N_1 \frac{1}{2} m_1 \overline{v_1^2} \\ pV &= \frac{1}{3} m_2 N_2 \overline{v_2^2} = \frac{2}{3} N_2 \frac{1}{2} m_2 \overline{v_2^2} \end{aligned} \right\}$$

siendo $\overline{v_1^2}$ y $\overline{v_2^2}$ las velocidades cuadráticas medias de sus moléculas. Si están a igual temperatura será., en virtud de (5.4.d):

$$\frac{1}{2} m_1 \overline{v_1^2} = \frac{1}{2} m_2 \overline{v_2^2}$$

y por tanto $N_1 = N_2$, que establece la hipótesis de Avogadro.

5.6. VELOCIDADES MOLECULARES DE UN GAS

De acuerdo con la ecuación (5.3.6), resulta :

$$\sqrt{\frac{2}{v}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (5.6.a)$$

fórmulas que nos permiten calcular la magnitud de las velocidades moleculares de un gas en condiciones determinadas.

5.7. LEY DE DALTON

Si en el volumen V, y en equilibrio térmico existe una mezcla de gases inertes, siguiendo un razonamiento análogo al visto en 5.3., resulta para la presión de la mezcla el valor

$$p = \frac{1}{3} m_1 n_1 \overline{v_1^2} + \frac{1}{3} m_2 n_2 \overline{v_2^2} + \dots$$

Por estar todos los gases a igual temperatura será, según --
(5.4.d)

$$m_1 \overline{v_1^2} = m_2 \overline{v_2^2} = \dots = 3 K T$$

y por tanto

$$p = (n_1 + n_2 + \dots) K T$$

Como $n_1 K T$, $n_2 K T$... representan según (5.4b) las presiones parciales p_1 , p_2 ... que los gases 1.2. ... ejercerian si estuviesen solos ocupando a igual temperatura el volumen total de la mezcla, resulta:

$$p = p_1 + p_2 + \dots$$

que es la expresión de la ley de Dalton.

5.8. LEY DE GRAHAM:

La teoría cinética de los gases proporciona también una base teórica a la ley empírica de Graham sobre la difusión de los gases según la cual la velocidad de difusión de un gas resulta ser inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su densidad. En efecto, de las ecuaciones 5.6a) resulta para dos gases distintos:

$$\frac{\sqrt{\overline{v_1^2}}}{\sqrt{\overline{v_2^2}}} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} \quad (5.8a)$$

de acuerdo con la ley de Graham .

TEMA VI. -

FENOMENOS INTERFERENCIALES Y DE DIFRACCION. -

6.1. - TEORIAS SOBRE LA NATURALEZA DE LA LUZ. OPTICA GEOMETRICA. OPTICA FISICA.

6.1.1. - TEORIAS SOBRE LA NATURALEZA DE LA LUZ

Entre las primeras teorías sobre la naturaleza de la luz se encuentra la que pudieramos denominar "teoría táctil" que suponía que el ojo emitía una especie de ondas sensitivas que llegaban a los objetos lejanos y proporcionaban entonces una cierta información sobre los mismos. Esta teoría evidentemente no explicaba porqué en la oscuridad no podían "sentirse" los objetos que estaban alrededor. Además tampoco explicaba porqué, también en la oscuridad, los cuerpos pueden hacerse visibles por calentamiento.

A continuación se pasó a la teoría de que los cuerpos brillantes emitían una especie de corpúsculos que llegaban al ojo excitándolo y produciéndose la sensación de la visión. Esta teoría fue desplazando a la anterior y alcanzando su máximo esplendor en el siglo XVII con Newton que supuso que la luz era un desplazamiento de corpúsculos materiales o partículas luminosas lanzadas por el foco a una cierta velocidad: si no encontraban un obstáculo en su camino seguían una trayectoria rectilínea explicándose entonces la reflexión como un fenómeno elástico.

Más también a mediados del siglo XVII y paralelamente al progreso de la anterior se desarrolló la teoría ondulatoria, postulada por Huygens y que permitía explicar los fenómenos de propagación, reflexión y refracción mediante un movimiento vibratoria que se propagaba en un medio elástico ideal: el éter. Mas los partidarios de la teoría corpuscular le objetaron la existencia de las sombras, que según la teoría ondulatoria no debían existir ya que las ondas doblan los obstáculos en sus trayectorias.

En el 1827, en cambio, Young puso de manifiesto que "luz mas luz podía dar oscuridad", en virtud de los fenómenos de interferencia difícilmente explicables mediante la teoría corpuscular. Apareció así la teoría ondulatoria de carácter escalar, según la cual las ondas eran longitudinales, de modo que el movimiento ondulatorio podía ser representado como la variación de una cantidad escalar.

Fresnel logró interpretar los fenómenos de polarización gracias a su hipótesis del carácter transversal de las ondas luminosas, según la cual el movimiento ondulatorio transversal debía ser representado por un vector -

cuya dirección estaba referida al plano de polarización.

Admitida la teoría ondulatoria de la luz, se trataba de hallar una expresión formal de los hechos; fué Maxwell quien en 1871 puso de manifiesto teóricamente que las propiedades de la luz se podían explicar admitiendo que se trataba de un fenómeno ondulatorio electromagnético, lo que fue posteriormente confirmado por Hertz en 1888.

Más una serie de hechos vinieron a revalorizar la teoría corpuscular y que la ondulatoria no explicaba.: Eran los efectos fotoeléctricos y Compton. Según las ideas de Planck sobre la existencia de unos "cuantos" o paquetes donde se concentra la energía electromagnética por múltiplos de una cantidad (el fotón), estos efectos eran fácilmente explicables. Según esto, la luz parece tener una doble naturaleza:

Cuando se propaga se comporta como onda electromagnética pero sus interacciones con la materia son fenómenos de tipo corpuscular.

La síntesis de las dos viejas teorías la realizó Luis de Broglie quien en 1924 fundió en un concepto mixto onda y corpúsculo, sintetizando así Mecánica, Electricidad y Óptica en lo que se denominó Mecánica Ondulatoria o Cuántica. Según esta teoría, todo corpúsculo que se mueve lleva siempre unido a él un cortejo de ondas; de este modo; el aspecto corpuscular y el ondulatorio son complementarios.

6.1.2. OPTICA GEOMETRICA: OPTICA FISICA. -

La óptica puede estudiarse por dos caminos de fundamento diferente y que permiten individualmente el estudio de unos fenómenos de manera más sencilla que lo serían por el otro. Estos son los denominados - Óptica Geométrica o de rayos y Óptica Física.

La Óptica de rayos se basa en los siguientes postulados:

6.1.2.a. - En un medio isotropo y homogéneo la luz se propaga en línea recta.

6.1.2.b. - De un punto luminoso parten infinitos rayos que son independientes entre sí, es decir que se pueden separar unos de otros.

6.1.2.c. - El camino de la luz es reversible

6.1.2.d. - En todos los casos se cumplen las leyes de refracción y reflexión.

La Óptica física, por el contrario, estudia los fenómenos teniendo en cuenta la naturaleza de la luz y le interesa más el estado de vibración que la trayectoria de las partículas. Un estado luminoso corresponde a un cierto estado de vibración y los puntos de igual fase constituyen un frente de onda.

Para el estudio de los puntos fundamentales de este tema, es decir, de la difracción y la interferencia, la óptica que usaremos será la física. Daremos únicamente pues aquí, unas ligeras nociones de la geometría que servirán mas de introducción que de verdadero objeto de estudio.

6.1.2.1. - OPTICA GEOMETRICA. GENERALIDADES:

Una onda plana está caracterizada por la propiedad de que su dirección de propagación y amplitud son los mismos en todos los puntos. Las ondas electromagnéticas en general no tienen esta propiedad. Sin embargo, una gran cantidad de ondas electromagnéticas tienen la propiedad de que, aunque no son planas, dentro de cada región de pequeñas dimensiones del espacio, pueden ser consideradas planas. Para esto, es claramente necesario que la amplitud y dirección de la onda permanezca practicamente constante en distancias del orden de la longitud de onda. Si esta condición se satisface, podemos llamar lo que denominaremos superficie de onda, esto es, una superficie en la que todos sus puntos tienen la onda la misma fase en un tiempo dado. En cada región de estas del espacio podemos hablar de dirección de propagación de la onda, normal a la superficie de onda. De esta manera introducimos el concepto de rayos, esto es curvas cuyas tangentes en cada punto coinciden con la dirección de propagación de la onda.

El estudio de las leyes de propagación de ondas en este caso - constituye el dominio de la óptica. Consecuentemente, la óptica geométrica - considera la propagación de ondas, en particular de luz, como la propagación de rayos completamente divorciada de sus propiedades de onda. En otras - palabras, la óptica geométrica corresponde al límite de longitud de onda tendiendo a cero.

Un modelo físico de rayo lo podremos obtener haciendo pasar la luz procedente de una fuente por una muy pequeña abertura hecha en una pantalla opaca. La luz que atraviesa la misma, en una primera aproximación puede tomarse como de las mismas características que la abertura y de contorno nítido. Una mas cuidadosa observación nos permitiría notar que en realidad el contorno no es nítido y que presenta unas variaciones muy rápidas de intensidad (variaciones en el espacio), dando lugar a zonas brillantes y oscuras: esto será lo que llamaremos bandas de difracción. La región en que estas variaciones tienen lugar es del orden de la magnitud de onda. De aquí que, cuando consideremos regiones de mayor dimensión, podremos prescindir por completo de tales fenómenos y considerar solo lo que hemos denominado optica geométrica o de rayos.

Así pues, cuando la longitud de onda sea lo suficientemente pequeña, la suma total de fenómenos ópticos puede ser deducida de consideraciones geométricas, determinando los caminos de los rayos y calculando la intensidad asociada.

6.2. TEORIA DE LA INTERFERENCIA

6.2.1. INTRODUCCION

Cuando dos o más rayos luminosos se superponen, el fenómeno que aparece no puede ser descrito de una manera fácil. Así, si la luz de una fuente se divide por una serie de aparatos adecuados en dos haces que a continuación se superponen, la intensidad en la región de superposición se encuentra que varía de un punto a otro entre máximos que exceden la suma de las intensidades de cada uno por separado y mínimos que pueden ser cero. Este fenómeno es el denominado de interferencia. Veremos que la superposición de haces de luz estrictamente monocromática, es decir, de una única frecuencia dará lugar siempre a interferencias. Sin embargo la luz producida por una fuente física real nunca es estrictamente monocromática ya que, como puede verse de la teoría atómica, la amplitud y la fase surgen siempre fluctuaciones, fluctuaciones tan rápidas que el ojo o un detector físico ordinario son incapaces de seguir. Si dos rayos son originados en la misma fuente, las fluctuaciones de los mismos están en general correlacionadas, y los rayos, se dice, son parcial o completamente coherentes dependiendo que la correlación sea parcial o completa. Si los rayos proceden de diferentes fuentes, las fluctuaciones son completamente incorrelacionadas, y se dirá que son mutuamente incoherentes. Cuando estos rayos de fuentes diferentes se superponen, no se observará ninguna interferencia bajo condiciones normales de observación.

Hay en general dos métodos de obtención de rayos de una fuente simple de luz, y estos dan base para la clasificación de los métodos empleados para producir interferencias. En uno, el haz se divide por paso a través de dos aberturas colocadas una al lado de la otra. Este método es el denominado de división de frente de onda y es útil solamente con fuentes suficientemente pequeñas. En otros, el haz alternativamente se divide en una o más superficies parcialmente reflejadas de cada una de las cuales, parte se refleja y parte se transmite. Este método se denomina división de amplitud, puede ser usado con fuentes de gran tamaño y los efectos son de mayor intensidad que en el anterior. En ambos casos es conveniente repasar los efectos que resultan de la superposición de dos haces y la de más de dos.

6.2.2. INTERFERENCIA DE DOS HACES : DIVISION DEL FRENTE DE ONDA

6.2.2.1. EXPERIMENTO DE YOUNG.

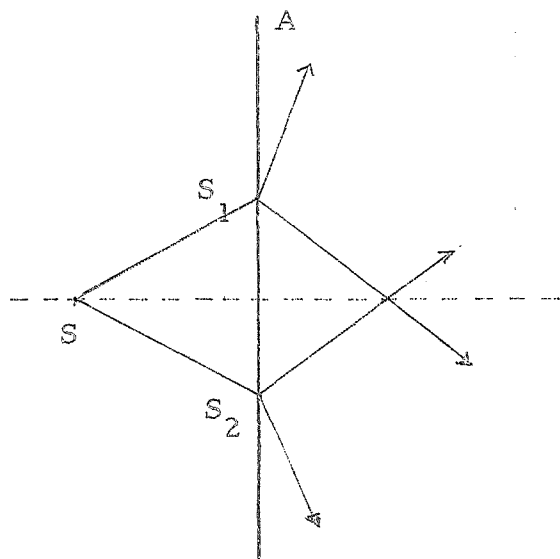


Fig. 6.2.2. α

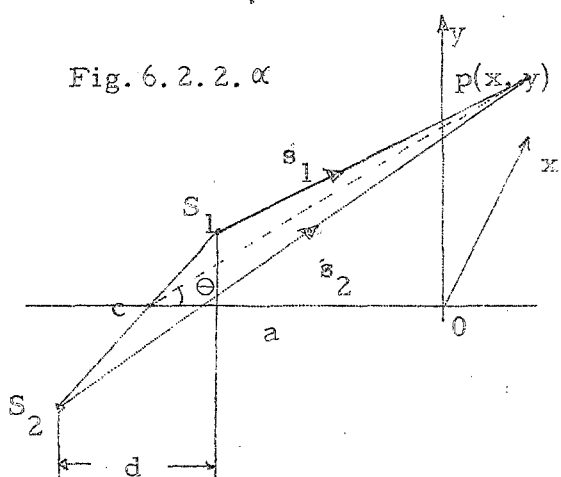


Fig. 6.2.2. β

El primer experimento que permitió ver la interferencia se debe a Young. Consiste en esencia en lo siguiente : luz de un punto fuerte S de luz monocromática atraviesa dos orificios puntuales S_1 y S_2 que se encuentran muy próximos en una pantalla A y equidistantes de S.

Fig. 6.2.2. α). Estos orificios puntuales actúan como fuentes puntuales monocromáticas en fase.

Los rayos procedentes de ambos se superponen detrás de A produciéndose los fenómenos de interferencia.

Supongamos que la imagen resultante se observa en un plano XY (fig. 6.2.2.β) normal a la perpendicular CO de $S_1 S_2$ y con el eje X paralelo a $S_1 S_2$. Sea d la separación entre los orificios y a la distancia desde la línea de unión de ellos y el plano de observación. Para un punto P(x, y) en el plano de observación,

$$S_1 = S_1 P = \sqrt{a^2 + y^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}$$

$$S_2 = S_2 P = \sqrt{a^2 + y^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2}$$

de donde

$$S_1^2 - S_2^2 = 2 x d$$

la diferencia de caminos geométricos para luz que llega a P procedente de S_1 y S_2 puede ser expresada en la forma

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{2xd}{S_2 + S_1}$$

en la práctica, debido a la corta longitud de onda de la luz visible, $d \ll a$ y así

también $x, y \ll a$, con lo que

$$S_2 + S_1 \sim 2a$$

de donde

$$\Delta S = \frac{Xd}{a}$$

Por otra parte, ya es sabido que toda onda plana monocromática puede ser representada de la forma

$$F = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

donde T y λ son el período y la longitud de onda de la señal que se propaga. En el punto P , la intensidad luminosa será la suma de las dos ondas que lleguen, y que podremos poner como

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{S_1}{\lambda} \right) \\ f_2 &= a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{S_2}{\lambda} \right) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{el estado vibratorio en } P \text{ vendrá dado} \\ \text{por} \end{array}$$

$$= f_1 + f_2 = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{S_1}{\lambda} \right) + a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{S_2}{\lambda} \right)$$

como

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \quad \text{se podrá poner}$$

$$= 2a \cos 2\pi \frac{S_2 - S_1}{2\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{S_1 + S_2}{2\lambda} \right)$$

vemos aquí directamente que se producirán máximos o mínimos de intensidad de acuerdo con el valor de $\frac{S_2 - S_1}{\lambda}$ esto es :

$$\text{habrá máximo cuando } \frac{S_2 - S_1}{\lambda} = K ; K = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{habrá mínimo cuando } \frac{S_2 - S_1}{\lambda} = (2K + 1) 1/2 ; K = 0, 1, 2, \dots$$

como antes vimos que era $S_2 - S_1 = \frac{Xd}{a}$ sustituyendo queda

$$\frac{Xd}{a} = K \cdot \lambda \quad X = \frac{K \lambda}{d} \quad a \quad \text{para máximo}$$

$$X = (2K + 1) \frac{\lambda a}{d \cdot 2} \quad \text{para mínimo}$$

vemos que tanto para la distancia entre máximos como entre mínimos, esta t tiene el valor :

$$D = X_{K+1} - X_K = \frac{K+1}{d} \cdot \lambda a - \frac{K}{d} \lambda a = \frac{\lambda a}{d}$$

lo que quiere decir que la repetición de las franjas claras y oscuras es regular.

Vemos también, que dentro de la aproximación que hemos realizado , las figuras interferenciales que aparecen son exclusivamente bandas que, según la posición de ejes que hemos adoptado, dependen solo de la coordenada x .

6.2.2.2. DISTRIBUCION DE INTENSIDADES EN LA INTERFERENCIA

La intensidad I de la luz se define como la cantidad de energía que atraviesa en la unidad de tiempo una área unidad colocada perpendicular a la dirección de flujo. de energía. Según puede demostrarse esta intensidad definida así resulta ser proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda, o sea :

$$I = C \cdot a^2$$

si en un punto determinado se suman dos ondas que representamos por

$$f_1 = \text{Re} (a_1 e^{i(\omega t - Kx)}) = \text{Re} [a_1(x) e^{i\omega t}]$$

$$f_2 = \text{Re} [a_2(x) e^{i\omega t}]$$

será $f = f_1 + f_2$ con lo que

$$f^2 = f_1^2 + f_2^2 + 2 f_1 f_2 \quad \text{esto es} \quad I = I_1 + I_2 + J_{12}$$

donde J_{12} es lo que llamaremos término de interferencia. Puede demostrarse también que su valor es $2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$ siendo δ la diferencia de fase entre los componentes.

Queda así :

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

Evidentemente habrá máximos de intensidad

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{máx}} &= I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 \cdot I_2} \\ \text{cuando } |\delta| &= 0, 2\pi, 4\pi, \dots \end{aligned} \right\}$$

y mínimos

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{mín}} &= I_1 + I_2 - 2 \sqrt{I_1 \cdot I_2} \\ \text{cuando } |\delta| &= \pi, 3\pi, \dots \end{aligned} \right\}$$

Un caso especial se presenta cuando $I_1 = I_2$, entonces queda

$$I = 2I, (1 + \cos \delta) = 4I, \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

y la intensidad varía entre un máximo de valor $I_{\text{máx}} = 4I$, y un mínimo de valor $I_{\text{mín}} = 0$

Puede verse inmediatamente que las condiciones obtenidas aquí son exactamente las mismas que las obtenidas en 6221 ya que una diferencia de recorrido en la trayectoria de los rayos de un múltiplo de λ equivale según puede comprobarse a un desfase de un múltiplo de 2π

6.2.3. INTERFERENCIA DE DOS HACES : DIVISION DE AMPLITUD

6.2.3. INTERFERENCIAS EN LAMINAS DELGADAS

Con frecuencia al observar películas o laminas finas iluminadas con luz blanca una variedad de colores que, como vamos a ver, resultan de interferencias que tienen lugar entre haces de luz reflejada en las distintas caras de la lámina. Ejemplos corrientes los tenemos en los colores que aparecen en las capas de aceite sobre el agua y en las burbujas de jabón.

Estudiemos este fenómeno para el caso de luz monocromática, reflejada y transmitida en ambas superficies de una lámina de caras paralelas de espesor h y de índice de refracción n . Un punto P en la misma zona del manantial luminoso, será alcanzado al mismo tiempo por dos rayos : uno re-

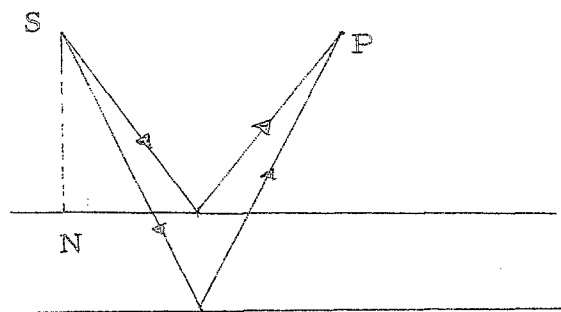


Fig. 6.2.3.1. α

flejado en la cara superior y otro en la inferior. De esta forma se formaría una imagen de interferencia en la misma cara que la fuente S . Por consideraciones de simetría las franjas de planos paralelos a la lámina serán circulares con

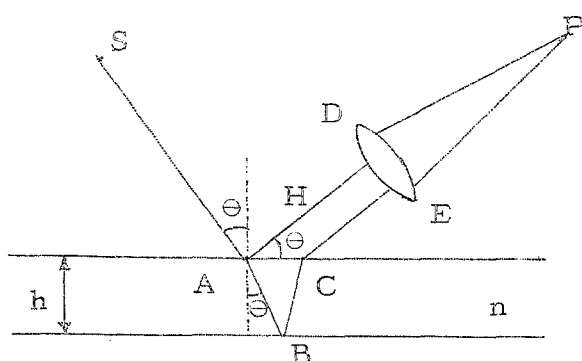


Fig. 6.2.3.1 β

centro en la normal SN a la placa.

El caso más interesante lo tenemos cuando el punto P se encuentra en el infinito o, lo que es igual, a una distancia considerable con respecto al espesor de la lámina. Es el caso también de cuando la fuente S se encuentra muy alejada con lo que los rayos que se reflejan en la cara superior e inferior parten paralelos de la

lámina. En estas condiciones los dos rayos de S a P. SABCEP y SANDP derivan del mismo rayo incidente y son paralelos después de abandonar la lámina. La diferencia de caminos ópticos será.

$$\Delta S = n (AB + BC) - AN$$

suponiendo que el medio superior es el aire que, por tanto, tiene $n = 1$

De la figura puede verse que :

$$\overline{ABC} = \frac{2h}{\cos \theta}, \quad AN = 2h \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \theta = 2nh \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos \theta}$$

de donde ,

$$\Delta S = \frac{2nh}{\cos \theta} - 2nh \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos \theta} = 2nh \cos \theta$$

o, en función de θ :

$$\Delta S = 2nh \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}$$

Veamos cuando y para qué diferencias de caminos ópticos recorrido hay máximos y mínimos de interferencia. Ocurre que cuando se produce una reflexión sobre un medio más denso (en este caso sobre la lámina de caras paralelas) tiene lugar un cambio de fase de π o lo que es lo mismo una diferencia de marcha de $\frac{\lambda}{2}$. Si se produce en cambio, sobre un medio menos denso, como es el caso de la cara inferior que es sobre el aire, tal cambio de fase no ocurre. Aplicando esa adición a los caminos obtenidos antes y , mediante lo visto en el apartado anterior, queda que tendremos un máximo de energía cuando :

$$2nh \cos \theta + \lambda/2 = K \lambda$$

y un mínimo si :

$$2nh \cos \theta + \lambda/2 = (2K + 1) \lambda/2$$

$$K = 0, 1, 2, \dots$$

De lo anterior vemos que cada franja corresponde a un valor particular de θ o lo que es igual al ángulo que forma la luz incidente sobre la lámina. Cuando el eje del instrumento por el que observamos las figuras interferenciales es normal al plano, las franjas son círculos concéntricos. El valor del número K es el orden de interferencia.

6.3. TEORIA DE LA DIFRACCION

6.3.1. INTRODUCCION

Ya hemos dicho que las leyes de óptica geométrica sólo son estrictamente correctas en el caso ideal en que la longitud de onda pueda ser considerada infinitamente pequeña. Esta condición se cumple de una manera muy escasa ya que la mayor parte de los casos se apartan de ella. Los fenómenos que son consecuencia directa de tales desviaciones se denominan fenómenos de difracción.

Repetiremos aquí de nuevo cuando y donde encontraremos fenómenos de difracción. Si a lo largo del camino de propagación de la luz hay un obstáculo, un cuerpo opaco, al que llamaremos pantalla, de forma arbitraria, o si la luz pasa a través de huecos en pantallas opacas si las leyes de la óptica geométrica fueran estrictamente aplicables encontraríamos regiones de sombra netamente diferenciadas de zonas totalmente iluminadas. En cambio la difracción origina el que los contornos no fueran tan netos como deberían y haya una distribución bastante compleja de luz. Estos fenómenos son tanto más fuertes cuanto que las dimensiones de las pantallas o los huecos sean más pequeños y la longitud de onda propagada mayor.

El problema de la teoría de la difracción consiste para localizaciones de la fuente luminosa y objetos y posiciones de estos datos, la distribución de la luz, esto es, el campo electromagnético en todo el espacio. La solución exacta del problema es normalmente de una gran complejidad matemática. Debido a ello solamente plantearemos aquí las condiciones generales, con indicación de los posibles resultados.

6.3.2. DIFRACCION : TIPOS DE DIFRACCION

Los fenómenos de difracción se clasifican en dos grandes grupos.

6.3.2.1. DIFRACCION DE FRAUNHOFER.

Cuando el foco luminoso ^Sy la pantalla en la que se observa el fenómeno están prácticamente a una distancia infinita del orificio o rendija que es la causa de la difracción. Su nombre se debe a causas históricas. Se obtiene una imagen bandeada del material.

6.3.2.2. DIFRACCION DE FRESNEL.

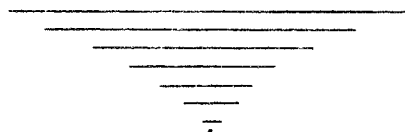
Cuando bien el foco luminoso o bien la pantalla, o bien ambos simultáneamente están a distancia finita del orificio. Se obtiene una imagen bañada del obstáculo.

Los límites entre estos dos tipos de difracción no están bien definidos. Los problemas teóricos que plantea la difracción de Fraunhofer son simples. En cambio, los cálculos para la de Fresnel son notoriamente complicados pues las ondas al llegar a la pantalla no presentan un frente plano, mientras que en la de Fraunhofer sí.

NOTA

En la sección 6.2.3.1. se dijo que un cambio de fase de π era lo mismo que una diferencia de marcha de $\lambda/2$. Esto se justifica viendo que

$$\begin{aligned} y &= A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{\lambda} \right) - \pi = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) = \\ &= A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{\lambda} - \frac{\lambda/2}{\lambda} \right) = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X - \lambda/2}{\lambda} \right) \end{aligned}$$



7.5.- Campos eléctricos y magnéticos paralelos.

Estudiemos los efectos sobre un haz de electrones de un campo eléctrico y uno magnético uniformes, paralelos y de sentido contrario.

Si la velocidad inicial de los electrones es nula o paralela a la de los campos, el campo magnético no influye sobre los electrones y el movimiento resultante depende únicamente de la intensidad del campo eléctrico \vec{E} . El problema se reduce al caso estudiado en (7.2).

Si la velocidad inicial de los electrones tiene una componente perpendicular al campo magnético, esta componente bajo la acción de \vec{B} produce una trayectoria circular independiente de \vec{E} . Pero debido a la acción del campo \vec{E} la velocidad en el sentido del campo varía con el tiempo, dando lugar a un movimiento de hélice con paso variable con el tiempo. Es decir la distancia recorrida por revolución en la dirección de los campos aumenta en cada giro.

En general, para cualquier situación en que una partícula cargada se encuentre bajo la acción de campos magnéticos y eléctricos simultáneamente, la fuerza sobre la partícula es

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} + q_0 \vec{v} \times \vec{B} = q_0 (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.10)$$

denominada fuerza de LORENTZ.

En nuestro caso suponemos campos eléctricos y magnéticos uniformes y paralelos

$$\vec{E} = \vec{j} E$$

$$\vec{B} = -\vec{j} B$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

La ecuación (7.10) queda

$$q E \vec{j} + q \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ 0 & -B & 0 \end{vmatrix} = m (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \quad (7.11)$$

de donde

$$a_x = \frac{q}{m} B v_z$$

$$a_y = \frac{q}{m} E$$

$$a_z = -\frac{q}{m} B v_x$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m} B v_z \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{q}{m} E \\ \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{q}{m} B v_x \end{aligned} \quad (7.12)$$

agrupando

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m} E = a_y$$

tenemos un movimiento uniforme -
acelerado según esta componente.

y por otra parte

$$\frac{d^2 v_z}{dt^2} = \frac{-q}{m} B^2 v_z \quad , \quad \frac{d^2 v_z}{dt^2} + \frac{q}{m} B^2 v_z = 0$$

ecuación diferencial cuya solución vamos a hallar

$$r^2 + \frac{q}{m} B^2 = 0 \quad , \quad r = \pm j \frac{q}{m} B = \pm j\omega \quad \text{según (7.7)}$$

luego

$$v_z = A e^{j\omega t} + B e^{-j\omega t} = C \sin \omega t + D \cos \omega t$$

con las condiciones iniciales

$$\left. \begin{array}{l} v_x = v_{ox} \\ v_y = v_{oy} \\ v_z = v_{oz} \end{array} \right| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

t = 0

de donde

$$D = v_{oz}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\omega v_x = C\omega \cos \omega t - D\omega \sin \omega t \quad , \quad C = -v_{ox}$$

luego

$$v_z = v_{oz} \cos \omega t - v_{ox} \sin \omega t$$

$$v_x = v_{ox} \cos \omega t + v_{oz} \sin \omega t$$

$$z = \frac{v_{oz}}{\omega} \sin \omega t + \frac{v_{ox}}{\omega} \cos \omega t + K \quad , \quad t = 0 \quad , \quad z = 0 \quad , \quad K = -\frac{v_{ox}}{\omega}$$

$$z = \frac{v_{oz}}{\omega} \sin \omega t + \frac{v_{ox}}{\omega} (\cos \omega t - 1)$$

$$x = \frac{v_{ox}}{\omega} \sin \omega t - \frac{v_{oz}}{\omega} \cos \omega t + K' \quad , \quad t = 0 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad K' = \frac{v_{oz}}{\omega}$$

$$x = \frac{v_{ox}}{\omega} \sin \omega t - \frac{v_{oz}}{\omega} (\cos \omega t - 1)$$

y para la componente y

$$v_y = v_{oy} + \frac{q}{m} E t$$

$$y = v_{oy} t + \frac{1}{2} \frac{q E}{m} t^2$$

Con lo que hemos determinado analíticamente la trayectoria de la partícula.

Como se ha visto en este ejemplo en estos casos de campos magnéticos y eléctricos la solución analítica se obtiene resolviendo unas ecuaciones diferenciales. El camino seguido para este caso es el que hay que seguir para cualquier otro: planteamiento del problema mediante la relación de Lorentz y la segunda Ley de Newton; ecuaciones diferenciales del movimiento según cada componente; condiciones iniciales del problema y por fin tenemos las componentes de la trayectoria. Como ejercicio para el alumno dejamos el caso de campos magnéticos y eléctricos perpendiculares con partícula inicialmente en reposo.

En general para estos problemas complejos el método intuitivo, cualitativo, deja de ser útil y hay que acudir al análisis cuantitativo del problema. Se tiene así un problema matemático ya que las ecuaciones de partida, en el caso de campos uniformes, son siempre fáciles de plantear.

El método para estudiar el caso general de una partícula sometida a campos eléctricos y magnéticos que forman un ángulo cualquiera es el mencionado anteriormente. La única complicación es la matemática.

7.6.- Optica electrónica.

La gran importancia que hoy tiene el movimiento de partículas bajo la acción de campos eléctricos y magnéticos, en multitud de circunstancias, ha originado estudios exhaustivos sobre el tema y ha puesto de manifiesto la gran analogía entre las trayectorias de las partículas cargadas y las trayectorias luminosas. Se ha creado la llamada óptica electrónica geométrica que usa de gran número de relaciones y vocabulario de la óptica geométrica.

Se han tomado de la óptica métodos para el estudio de discontinuidades entre campos uniformes, el concepto de lente, la ley de la refracción, etc., Estas ideas son de aplicación constante en los tubos de rayos catódicos para T.V. y oscilógrafos y en toda la gama de tubos especiales para alta frecuencia como son el tubo de ondas progresivas, el Klystron y el magnetrón.

TEMA VIII.- Propiedades dieléctricas y magnéticas de la materia.

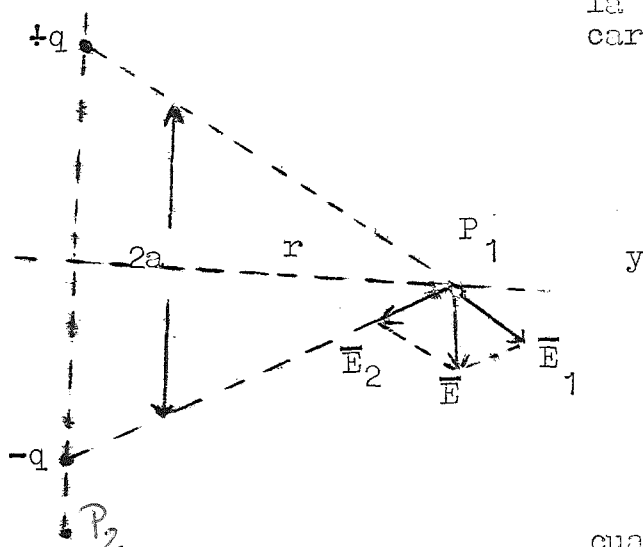
PARTE PRIMERA: DIELECTRICOS.

8.1.- Introducción.- Tratamos de estudiar ahora los campos eléctricos en presencia de materia. El experimento más clásico es la variación de la capacidad de un condensador de placas paralelas cuando en su interior se coloca mica, vidrio o cualquier material aislante. La capacidad aparece multiplicada por una constante mayor que la unidad. Este factor que denominamos constante dieléctrica relativa

es independiente del tamaño y forma del condensador y varía ampliamente de un material a otro. Al vacío lo asignamos, arbitrariamente, una constante dieléctrica relativa igual a 1. Todos los materiales no conductores presentan este efecto y los llamamos dieléctricos. - Vamos a estudiar en este tema las causas de este efecto y a determinar los parámetros que lo describen.

8.2.- El dipolo eléctrico y su momento.

Recordemos que el conjunto de una carga positiva y una negativa de igual magnitud q separadas una distancia $2a$ forma un dipolo eléctrico. Es simple de comprobar que los campos eléctricos producidos en un punto situado según la línea que une las cargas o en la mediatriz del segmento de las cargas viene dado, por



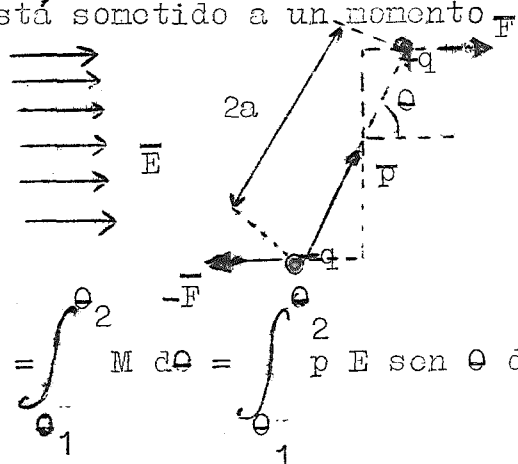
$$E_{P1} = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_{P2} = \frac{4aq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (8.1)$$

cuando $r \gg a$.

En ambos casos se muestra como la intensidad del campo varía inversamente con el cubo de la distancia y en ambos casos es proporcional a la cantidad $2aq$ que llamamos momento del dipolo: $p = 2aq$.

Un dipolo eléctrico situado en un campo eléctrico uniforme \vec{E} está sometido a un momento \vec{M}



$$\vec{F} = q \vec{E}$$

$$M = 2 Fa \sin \theta = 2aq E \sin \theta =$$

$$= p E \sin \theta \quad (8.2) \quad \vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

el trabajo efectuado valdrá:

$$T = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} p E \sin \theta d\theta = p E \left[-\cos \theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Si tomamos como porción de origen $\frac{\pi}{2}$

$$T = - p E \cos \theta_2 = - \vec{p} \cdot \vec{E} \quad (8.3)$$

Es decir todo el comportamiento del dipolo puede ser descrito en magnitud y dirección por medio de un vector que llamamos momento del dipolo. Es un vector libre cuyo sentido va de la carga negativa a la positiva.

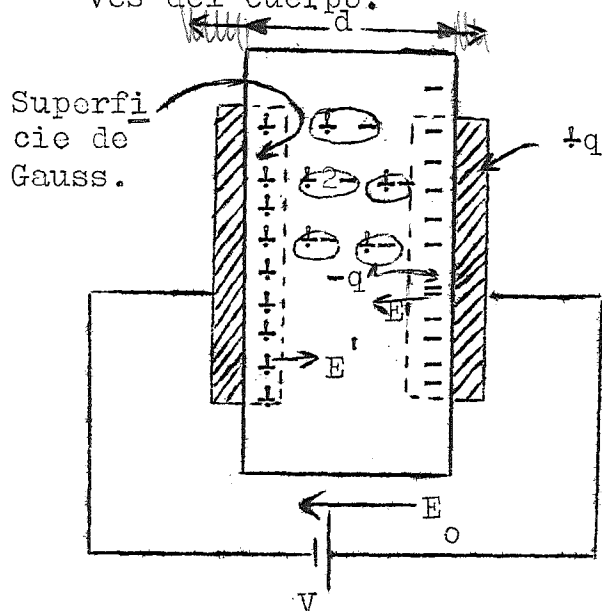
El dipolo tenderá a alinearse con el campo eléctrico aplicado.

8.3.- Polarización de la materia.

Estudieemos el comportamiento de la materia cuando se la somete a un campo eléctrico. Nuestra materia está compuesta por moléculas con un cierto número de átomos cada una. Así pues cada molécula contiene cargas positivas y negativas en su volumen. Respecto a la distribución de cargas pueden existir dos posibilidades: en ausencia de campos eléctricos aplicados las cargas están distribuidas en la molécula de manera que se observan ciertas concentraciones de cargas positivas y negativas en diferentes extremos que da lugar a la creación de un dipolo eléctrico. En tal situación cada molécula de nuestro cuerpo equivale a un dipolo eléctrico y se dice que el cuerpo tiene una polarización espontánea. Cuando apliquemos un campo eléctrico exterior los dipolos tenderán a alinearse con él, aunque la agitación térmica impedirá que aquella sea total.

La segunda posibilidad se refiere a la situación en que la distribución de cargas en la molécula es uniforme no dando lugar a ningún dipolo espontáneo. Al aplicar un campo eléctrico exterior las cargas de cada molécula se desplazarán en su interior y se agruparán en dos extremos dando lugar a un dipolo eléctrico inducido. Es intuitivo pensar que el momento del dipolo inducido, que existe sólo cuando hay campo eléctrico, será proporcional a este campo eléctrico. Volvamos a tener una alineación, parcial al menos, de las moléculas del cuerpo. Tenemos una polarización inducida.

Debemos insistir que en los procesos de polarización se verifica una estricta neutralidad de carga para cualquier volumen y no ha habido desplazamiento o transporte libre de cargas a través del cuerpo.



Pensemos en el condensador de la figura. Por efecto del campo creado por la batería el dieléctrico se polariza. La placa permanece neutra, pero en la cara de la derecha aparece una acumulación de carga negativa y en la de la izquierda de carga positiva. Han aparecido cargas superficiales inducidas, ambas son de igual magnitud.

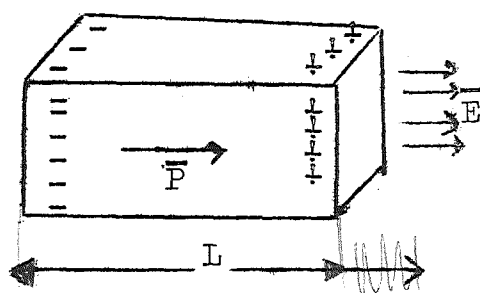
Estas cargas inducidas crean un campo eléctrico que se opone al externo, al que habría en ausencia de dieléctrico. Es decir, en un punto situado entre las armaduras del condensador y en ausencia de dieléctrico, existiría un campo eléctrico

$E_0 = \frac{V}{d}$. Por el simple hecho de introducir el dieléctrico, el campo eléctrico E en ese punto es la diferencia entre el E_0 y el creado por las cargas superficiales inducidas E' .

$$E = E_0 - E'$$

Desde un punto de vista atómico el dieléctrico ha quedado formado por un conjunto de dipolos cuyas acciones se suman. Pode-

mos hablar diciendo que tenemos vectores momento de dipolo distribuidos por el cuerpo. Su resultante por unidad de volumen será un vector \vec{P} que llamamos polarización. Así pues la polarización eléctrica \vec{P} es la resultante de los dipolos eléctricos en una unidad de volumen y es función de la naturaleza del sólido. Existe, sin embargo, una estrecha relación entre la carga superficial inducida y este vector \vec{P} . Para visualizarla volvamos a dibujar nuestro dieléctrico situado en un campo eléctrico uniforme.



Llamemos σ_p a la densidad de carga superficial inducida. El vector polarización total del bloque será $\vec{P} = \frac{1}{L} \sum \vec{p}$. Por otra parte el bloque ha quedado como constituido por un gran dipolo de cargas $+\sigma_p S$ y $-\sigma_p S$ y de momento $\sigma_p SL$. De donde $\vec{P} = \sigma_p$. Esta relación modular puede

generalizarse a una forma integrovectorial si suponemos una superficie limitadora del dieléctrico de cualquier forma.

$$q_p = - \int_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (8.4)$$

el signo - se explica debido a que las líneas de campo del vector polarización van de una carga negativa a una positiva, al contrario de lo que sucede con el campo eléctrico \vec{E} . Entonces las líneas de \vec{P} saldrán de un volumen que contenga carga inducida negativa.

Hay que insistir que la ecuación (8.4) se refiere a cargas inducidas, ficticias. También el vector \vec{P} solo tiene existencia en el interior de los dieléctricos. El efecto macroscópico de la producción de dipolos moleculares se manifiesta al exterior como la producción de cargas superficiales inducidas. Así cuando tengamos un bloque de un dieléctrico polarizado podemos explicar los efectos macroscópicos que ocurren en sus cercanías reemplazando el bloque entero por las cargas superficiales inducidas. Haciendo esto ignoramos la naturaleza íntima del fenómeno y de los dipolos inducidos.

Otra simplificación que vamos a introducir es que la polarización \vec{P} es proporcional al campo eléctrico aplicado

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (8.5)$$

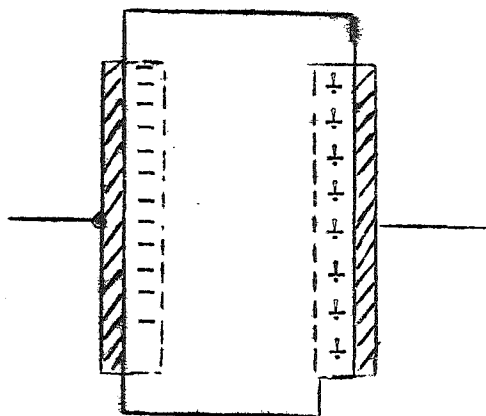
donde χ es la susceptibilidad eléctrica y \vec{E} es el campo macroscópico exterior ya modificado por las cargas superficiales inducidas. La constante ϵ_0 se ha introducido para simplificar relaciones posteriores.

Afortunadamente, (8.5) se verifica en la mayoría de los materiales y dentro de márgenes amplios.

8.4.- Ley de Gauss en los dieléctricos.

Apliquemos la ley de Gauss a una región elegida de tal manera que encierre cargas almacenadas en las placas metálicas del

condensador y cargas superficiales inducidas. Tal es la situación indicada en la figura por las líneas de trazos.



Ahora el campo eléctrico se encontrará relacionado con la carga libre y la superficial inducida.

$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} (q_l + q_p) = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{total}}$$

Es decir que el flujo de las líneas de campo eléctrico depende de la carga total, libre e inducida, que hay en ese volumen.

Volvamos a considerar el problema del condensador de placas paralelas, cuya carga en las mismas es constante aunque varíe el dieléctrico.

En el caso del vacío, la densidad de cargas móviles o libres en las placas es σ_l y el campo eléctrico uniforme entre las placas es

$$E = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0}$$

Cuando introducimos un dieléctrico que llene el espacio entre las cargas, se polariza el dieléctrico y aparecen las cargas superficiales inducidas con una densidad σ_p en las caras del dieléctrico perpendiculares al campo eléctrico.

Ahora el campo eléctrico es

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_l + \sigma_p) \quad (8.6)$$

Si suponemos que σ_l se ha mantenido constante. Como σ_p y σ_l son de signo contrario, la introducción del dieléctrico ha producido una disminución o debilitamiento del campo comparado con el vacío. En realidad el campo E es un campo medio pues si recorriésemos el dieléctrico el campo varía de punto a punto periódicamente.

Teniendo en cuenta que según

$$|\sigma_p| = P = \epsilon_0 \chi E$$

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_l - \epsilon_0 \chi E) \quad \therefore \quad E = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0 (1 + \chi)}$$

y llamando

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi) \quad \text{y} \quad K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

Siendo ϵ la permitividad del material. Obtendremos expresiones para el campo eléctrico la capacidad y el teorema de Gauss - análogas en forma, a la del vacío pero sustituyendo ϵ_0 por ϵ . Así

$$E = \frac{\sigma_1}{\epsilon}$$

$$C = \frac{q_1}{V}$$

para el vacío

$$C = \frac{\frac{\sigma_1 A}{E d}}{\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} d} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

para el dieléctrico

$$C = \frac{\frac{\sigma_1 A}{\frac{\sigma_1}{\epsilon} d}}{\frac{\sigma_1}{\epsilon} d} = \frac{\epsilon A}{d}$$

y la ley de Gauss

$$\int \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} (q_1 + q_p)$$

$$\epsilon_0 \int \vec{E} \cdot \vec{ds} = A (\sigma_1 - \epsilon_0 \chi E)$$

$$\epsilon_0 \int \vec{E} (1 + \chi) \vec{ds} = A \sigma_1 = q_1$$

$$\epsilon \int \vec{E} \cdot \vec{ds} = q_1$$

en que también se conserva la forma. Se considera solo la carga libre y la inducida se tiene en cuenta en el factor $(1 + \chi)$ del primer miembro.

En resumen tenemos dos métodos para estudiar las propiedades dieléctricas de la materia. Una es relacionarlas con la polarización individual de las moléculas. La otra es tenerla en cuenta - sustituyendo la constante de permitividad del vacío ϵ_0 por la constante de permitividad de ese medio.

8.5.- El desplazamiento eléctrico \vec{D} . Según lo anterior el campo eléctrico \vec{E} depende de las cargas libres y de las cargas inducidas. Tratemos de buscar un vector que dependa exclusivamente de las cargas reales. Recordando que

$$\sigma_{\text{total}} = \sigma_l + \sigma_p \text{ y que}$$

$$\sigma_t = \epsilon_0 E$$

$$|\sigma_p| = P \quad \therefore \sigma_l = \epsilon_0 E + P$$

y llamando \vec{D} a esta densidad de carga libre tenemos el vector desplazamiento

$$\text{siendo también } \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

De sus definiciones deducimos:

1.- \vec{D} está únicamente relacionado con la carga libre. Se puede representar un campo vectorial de \vec{D} por líneas de campo que comiencen y terminen en cargas libres.

2.- \vec{P} está relacionado únicamente con las cargas de polarización, las inducidas. También se puede representar por líneas de campo pero desde cargas negativas a positivas.

3.- \vec{E} está relacionado con todas las cargas que existen. Determina la fuerza que obra sobre una carga. \vec{P} y \vec{D} son vectores auxiliares

$$\vec{P} \text{ y } \vec{D} \text{ se miden en cul/m}^2$$

$$\vec{E} \text{ en V/m ó v/cul.}$$

De la definición de $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ queda la ley de Gauss generalizada

$$\int \vec{D} \cdot \vec{ds} = q_l \text{ en presencia o no de dieléctricos.}$$

\vec{P} vale cero fuera del dieléctrico

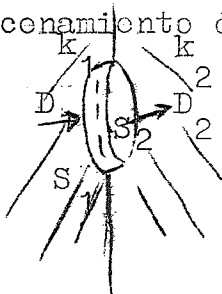
\vec{D} es el mismo valor en él que el vacío

\vec{E} tiene valores diferentes en el dieléctrico y en el hueco.

8.6.- Condiciones de contorno entre dieléctricos.

Supongamos una superficie plana de separación entre dos dieléctricos de diferentes constantes k_1 y k_2 . En sus superficies

no hay almacenamiento de cargas libres aunque si inducidas. Tomemos una superficie de Gauss en forma de moneda como indica la figura. Al no haber carga libre encerrada



$$\int \vec{D} \cdot \vec{ds} = 0$$

El flujo a través de la superficie lateral del cilindro se puede despreciar porque se puede hacer tan pequeña como se quiera. Quedando :

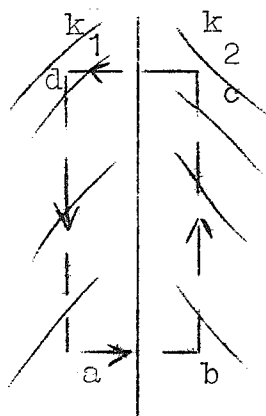
$$\int \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{s_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{s} + \int \vec{D}_2 \cdot d\vec{s} = 0 = -D_{1n} \cdot s_1 + D_{2n} \cdot s_2$$

$$D_{1n} = D_{2n}$$

el signo menos para D_{1n} aparece por ser vector entrante en la superficie s_1 .

Luego las componentes de \vec{D} normales al contorno de separación son continuas.

Supongamos la misma situación y construyamos un circuito como indica la figura de un rectángulo alargado. Por ser cerrado



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

La circulación a lo largo de ab y cd se puede despreciar por ser caminos tan pequeños como se quiera. Luego

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_b^c \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_b^c E_{t2} dl - \int_d^a E_{t1} dl = 0 \end{aligned}$$

luego como $b \rightarrow c = d \rightarrow a$

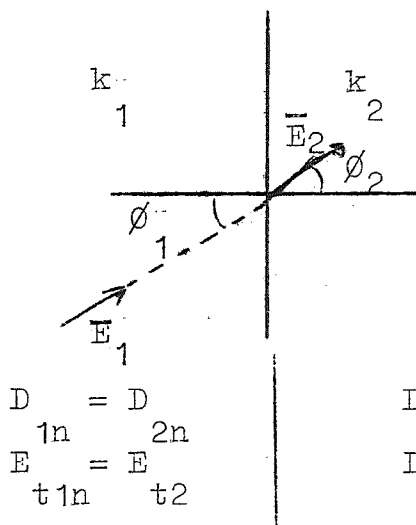
$$E_{t1} = E_{t2}$$

las componentes de \vec{E} tangentes a la separación, son continuas a través del centro de separación.

Como ejemplo de aplicación estudiemos la dirección que tendrá un campo eléctrico \vec{E}_1 que se encuentra en el medio ① después de pasar al medio ②.

Suponemos campos eléctricos uniformes pues los medios son isótropos y homogéneos.

Para encontrar la relación entre ϕ_1 y ϕ_2 estableceremos las relaciones anteriores:



$$\left. \begin{aligned} D_{1n} &= \epsilon_0 k_1 E_1 \cos \phi_1 \\ D_{2n} &= \epsilon_0 k_2 E_2 \cos \phi_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} E_{t1} &= E_1 \sin \phi_1 \\ E_{t2} &= E_2 \sin \phi_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\cos \phi_1}{\cos \phi_2} = \frac{E_2}{E_1} \frac{k_2}{k_1}$$

$$\frac{\sin \phi_1}{\sin \phi_2} = \frac{E_2}{E_1}$$

$$\frac{\tan \phi_1}{\tan \phi_2} = \frac{k_1}{k_2}$$

8.7.- Almacenamiento de energía en un campo eléctrico

Recordemos que toda configuración de cargas tiene asociada una cierta energía potencial igual al trabajo que debe efectuarse para constituir la configuración a partir de las cargas individuales a las que se supone que originalmente estaban separadas por distancias infinitas y en reposo. Esta energía potencial nos recuerda la almacenada en un resorte comprimido o la energía potencial gravitatoria de un objeto elevado y la tierra.

Cada vez que llevemos una nueva carga al condensador este aumenta su potencial y para traer aún mas carga hay que realizar un trabajo luego aún el condensador elevará más su potencial.

Sea un condensador de capacidad C (capacidad que depende exclusivamente de su configuración geométrica y del dieléctrico) que en un cierto instante t tiene un potencial $V(t)$ y una carga $q(t)$. Pensemos en el trabajo que hay que realizar para incrementar en dq la carga del condensador

$$dT = dU = V(t) dq = \frac{q(t)}{C} dq$$

Si el proceso se ha empezado cuando la carga era nula y si que hasta que la carga es q , el trabajo total será

$$T = \int dT = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2$$

Esta energía almacenada, es razonable suponer que reside en el campo eléctrico. Podemos decir que cuando cargamos un condensador creamos un campo eléctrico en el espacio y que este campo eléctrico indica una energía almacenada.

Así para el caso de un condensador de placas paralelas el campo eléctrico es uniforme y reside entre las placas. Se puede definir una densidad de energía dividiendo el trabajo realizado para cargar el condensador por el volumen en que reside el campo

$$\frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2} C V^2}{Ad} = \frac{k \epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{d} \right)^2$$

pero $\frac{V}{d}$ es la intensidad del campo eléctrico

$$U = \frac{1}{2} k \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (8.7)$$

2 Entonces la energía almacenada en un volumen depende de E en ese volumen.

Aunque la fórmula (8.7) se ha deducido únicamente para este caso simple del condensador de placas planas, con campos eléctricos uniformes, es válida para cualquier situación. En general la energía almacenada en un volumen depende del E^2 en ese volumen. Así la expresión general de la energía total almacenada sería

$$U = \frac{1}{2} \epsilon \int E^2 d v$$

integrando al espacio de que se trate.

Hay que señalar que si el espacio en estudio contiene cargas puntuales, el campo eléctrico E tiende a infinito según nos aproximamos a ellos. Afortunadamente las cargas reales tienen tamaño finito y no aparece este problema.

Como indica (8.7) la energía almacenada es función del dieléctrico ~~supuestas~~ las otras magnitudes constantes. Así supongamos que tenemos un condensador de placas paralelas que carga a un potencial V y seguidamente se desconecta la batería. La energía almacenada será

$$U_o = \frac{1}{2} C_o V_o^2$$

Seguidamente se introduce una placa dieléctrica con $K = K_1$ que ocupa el espacio entre placas. La energía es ahora

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} K_1 C_o \left(\frac{V_o}{K} \right)^2 = \frac{1}{K} U_o$$

La energía después de introducir el dieléctrico es menor en un factor $\frac{1}{K}$. La diferencia se ha utilizado en realizar trabajo sobre la lámina entrante. Este trabajo positivo que el condensador efectúa sobre la lámina será:

$$T = U_o - U = \frac{1}{2} C_o V_o^2 \left(1 - \frac{1}{K} \right)$$

II PARTE

PROPIEDADES MAGNETICAS DE LA MATERIA

8.8.- Introducción.- Recordemos un simple experimento: si por un solenoide hacemos pasar una corriente eléctrica se nos crea una inducción magnética B y un flujo por el solenoide: $B.A$. Si bruscamente cortamos el paso de corriente la variación de flujo producirá una f.e.m. inducida. Si como detector de variaciones usamos un galvanómetro balístico (cuya desviación es proporcional al flujo inicial) la lectura de este galvanómetro será distinta si el solenoide está

vacío o está ocupado por Fe por ejemplo. Para una norma corriente se indica que los flujos son distintos. Esto nos indica que la materia altera la situación inicial. Seguidamente vamos a estudiar las razones de este comportamiento magnético de la materia, las tres formas posibles de paramagnetismo, diamagnetismo y ferromagnetismo y su relación con el comportamiento microscópico de la materia.

Nuestra finalidad y los parámetros que usamos para este estudio serán análogos a los que empleamos en la parte primera para las propiedades dieléctricas de la materia.

8,9.- Dipolo magnético y su momento.

Recordemos que las corrientes eléctricas, es decir las cargas en movimiento, crean campos magnéticos y que tal fenómeno está regido por la ley de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

siendo μ_0 la permeabilidad del vacío

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ weber/A.m}$$

La ley de Ampère es útil para el cálculo sólo si la distribución de corriente presenta una simetría que permita calcular con facilidad la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$. Este requisito limita considerablemente la utilidad de esta ley en los problemas prácticos. No es que la ley de Ampère falle es sólo que su aplicación es limitada bajo el punto de vista práctico.

En tales casos se calcula \vec{B} en un punto cualquiera dividiendo la distribución de corriente en elementos de corriente aplicando la ley de Biot-Savart y sumando las contribuciones de campo aportadas por cada elemento de corriente en el punto considerado.

La ley de Biot-Savart se escribe en forma vectorial como

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$i d\vec{l}$ es el elemento de corriente creador del campo magnético $d\vec{B}$

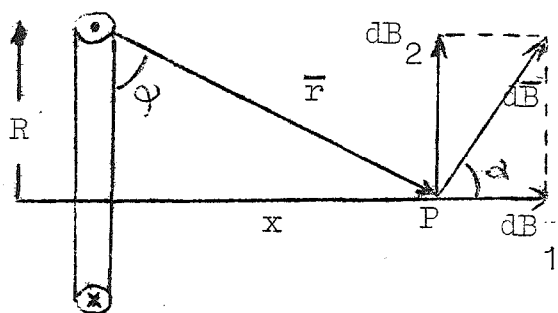
\vec{r} es el vector que va desde el elemento de corriente hasta el punto P en el que se quiere determinar $d\vec{B}$.

El campo resultante en P será $\vec{B} = \int d\vec{B}$

Consideremos una espira circular de corriente, de radio R y que lleva una corriente i. Calculemos \vec{B} para puntos situados en el eje.

El elemento $d\vec{l}$ será siempre tangente a la espira y para la parte superior de la misma será perpendicular al papel saliendo del mismo.

El elemento $d\vec{B}$ estará por tanto en el plano del papel y



se podrá descomponer en dos componentes, una dB_1 a lo largo del eje de la espira y otro dB_2 perpendicular al mismo. Debido a la simetría las componentes normales se anulan para todo el anillo y se suman las componentes según el eje. Observemos que dB_1 es el mismo para cualquier elemento de corriente

del anillo es decir

$$\bar{B} = 2\pi R \bar{dB}_1$$

Calculemos dB_1

$$dB_1 = dB \cos \alpha = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl r}{r^3} \cos \alpha = \frac{\mu_0 i \cos \alpha dl}{4\pi r^2}$$

siendo

$$\cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

luego

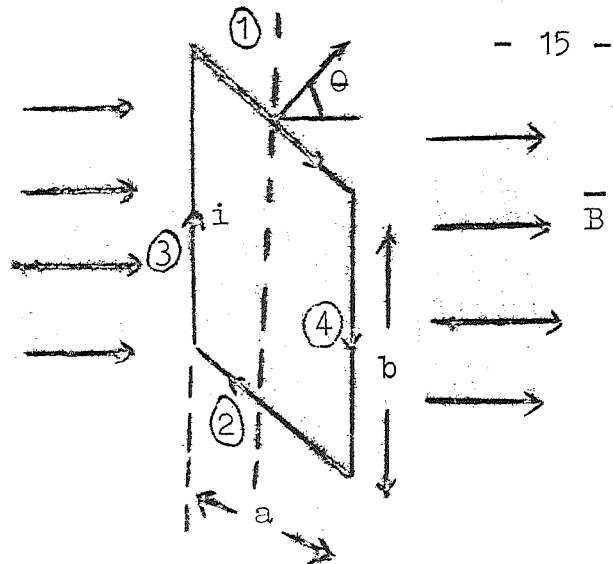
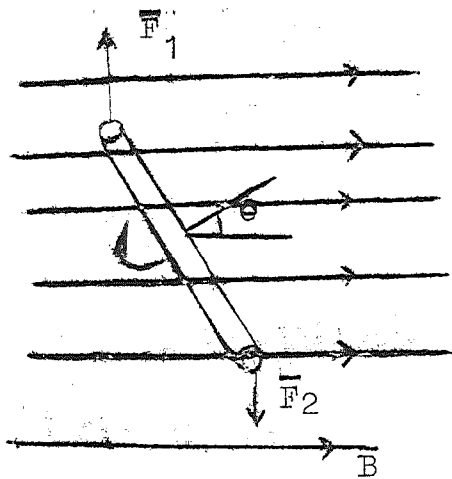
$$B = \frac{\mu_0 i R 2\pi R}{4\pi \sqrt{R^2 + x^2} (R^2 + x^2)} = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Si suponemos $x \gg R$, es decir P está bastante alejado de la espira

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(\pi R^2 i)}{x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{p_m}{x^3} \quad (8.8)$$

Siendo p_m el llamado momento del dipolo magnético. La ecuación (8.8) es análoga a (8.1) del campo eléctrico creado por un dipolo eléctrico. Tenemos así definido un dipolo magnético como una espira de corriente y su momento como el producto del área de la misma por la corriente.

Coloquemos esta misma espira en un campo magnético \bar{B} uniforme. La experiencia habrá que realizarla de manera que se pueda alimentar a la espira con la corriente i y de manera que pueda girar alrededor de algún eje que pase por el centro de masas.



- 15 -

Recordemos que la fuerza que se ejerce sobre un conductor por el que circula una corriente es

$$\vec{F} = i \vec{l} \times \vec{B}$$

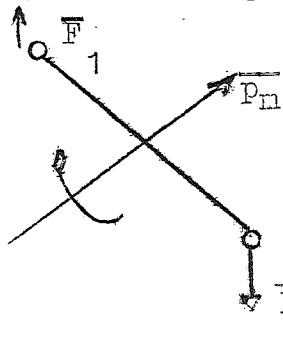
La fuerza neta sobre la espira es la resultante de las fuerzas sobre los cuatro lados. Sobre los lados ① y ② se ejercen fuerzas paralelas al eje y de sentido contrario. Su resultante es cero y el par nulo también. Sobre los lados ③ y ④ se ejercen fuerzas de valor.

$$F_1 = F_2 = i a B$$

que producen un par de momento

$$\tau = i a B b \sin \theta = (i a b) \hat{n} \sin \theta = p_m B \sin \theta$$

entonces podemos asignar a p_m el caracter vectorial y cuyo sentido viene dado por la regla del sacacorchos al seguir el sentido de circulación de i . Este sentido coincide con el del campo \vec{B} creado por la espira.

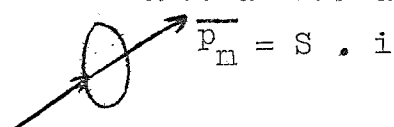


Como vemos el par ejercido por el campo magnético tiende a alinear la espira con el campo.

$$\vec{\tau} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

En general se puede demostrar que el valor del momento del dipolo eléctrico depende del producto área por corriente cualquiera que sea la forma de la espira.

Cualitativamente, podemos resumir diciendo que una espira de cualquier forma por la que circula una corriente i se denomina dipolo magnético y su comportamiento queda descrito por el vector momento del dipolo magnético \vec{p}_m , de módulo área \times corriente; sentido el de avance del sacacorchos y según el eje de la espira. Este vector tiende a alinearse con el campo magnético aplicado.

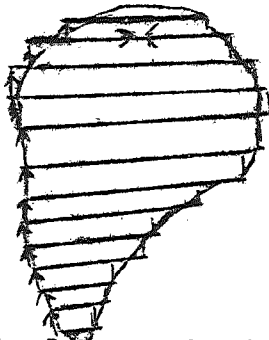


Análogamente a como el vector momento del dipolo eléctrico se alineaba con el campo eléctrico exterior.

Señalemos como respecto a los puntos del eje de la espi-

ra coinciden en dirección y sentido los vectores \vec{B} creado por la espira y \vec{p}_m definidor de la espira.

La utilidad y justificación de usar \vec{p}_m es que cualquiera que sea la forma de la espira, el par depende únicamente de i A y no de la forma. Podemos justificar esto tomando un bucle de forma arbitra-



ria y considerarlo como la suma de espiras rectangulares que indica la figura. Si la misma corriente circula por cada espira rectangular en el mismo sentido las corrientes interiores se anulan quedando sólo la corriente periférica que se puede aproximar a la espira dada tanto como nosotros queramos. El par total es la suma de los pares individuales y por tanto depen-

de sólo de la corriente y del área total independiente de la forma.

Ya que sobre una espira de corriente u otro dipolo magnético obra un momento cuando se coloca en un campo magnético exterior, se deduce que debe hacerse un trabajo (positivo o negativo) mediante un agente exterior para cambiar la orientación en un campo magnético externo.

El trabajo que un agente exterior debe realizar para cambiar de posición al dipolo será

$$T = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} p_m B \sin \theta d\theta = p_m B \left[-\cos \theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

y tomando como posición de partida $\theta_1 = 90^\circ$

$$T = - \vec{p}_m \cdot \vec{B}$$

TABLA RESUMEN DE LAS RELACIONES EN DIPOLOS ELECTRICOS Y MAGNETICOS

Propiedad	Dipolo eléctrico	Dipolo Magnético
Campos en puntos del eje muy distantes del dipolo	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3}$	$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{p_m}{x^3}$
Campos en puntos muy distantes situados en el plano mediatriz	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3}$	$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{x^3}$
Momento en un campo externo	$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$	$\vec{\tau} = \vec{p}_m \times \vec{B}$
Energía en un campo externo	$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$	$U = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$
Vector representativo	$p = q l$ de carga $+$ a carga $-$	$p_m = i A$ según el eje espira sacacorchos.

8.10.- Ley de Gauss del magnetismo.

La ley de Gauss del magnetismo es una manera analítica de expresar una conclusión deducida de los hechos experimentales, esto es, que no existen polos magnéticos aislados. Es decir que el flujo del vector \vec{B} que atraviesa una superficie cerrada cualquiera debe ser nulo.

$$\oint_B \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Las líneas de \vec{B} son siempre cerradas y no terminan ni empiezan en cargas magnéticas. No hay fuentes de \vec{B} ; no hay puntos de donde salgan líneas de campo \vec{B} y tampoco hay sumideros en los cuales acaben dichas líneas.

8.11.- Los vectores M, B y H.

Supongamos un determinado solenoide en forma de toro, con N espiras, longitud L y por el que circula una corriente i. Cuando en su interior existe el vacío, la inducción magnética es

$$B = \mu_0 \frac{N i}{L} \quad \text{weber} \cdot m^{-2} \quad B = \mu_0 \cdot j_s \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{siendo } j_s \text{ un parámetro} \\ \text{que denominamos densi-} \\ \text{dad de corriente del} \\ \text{solenoide.} \end{array} \right.$$

que podemos poner en la forma $B = \mu_0 \cdot j_s$.

Si en el interior del solenoide colocamos un trozo de materia; \vec{B}

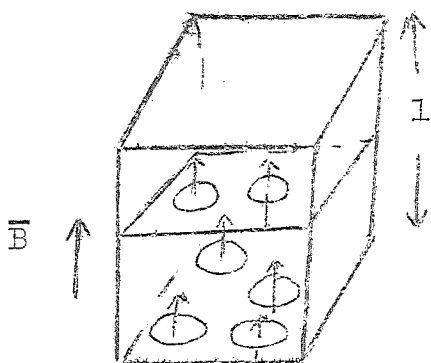
es, en general, modificado por la presencia del cuerpo. Esta modificación se hace muy ostensible con determinadas sustancias que denominamos ferromagnéticas. Concluimos en que debe haber una interacción entre la materia y el campo magnético cuyo resultado es modificar el valor de B.

Esto es previsible si pensamos que la materia está compuesta de dipolos magnéticos atómicos: dipolos magnéticos que resultan del movimiento orbital de los electrones alrededor del núcleo, dipolos intrínsecos con el movimiento de spin del electrón (clásicamente la carga girando se pudo considerar como si estuviera hecha de espiras infinitesimales de corriente) y de los dipolos magnéticos originados por el núcleo atómico. Entonces el efecto de un campo magnético externo será tender a alinear los momentos de los dipolos según la dirección del campo.

Podemos caracterizar el grado de alineamiento por el momento magnético total por unidad de volumen, procedente de la suma vectorial de los momentos magnéticos individuales. Esta es la magnetización \vec{M} del material cuyo significado en magnetismo es similar al desarrollado por \vec{P} en los dieléctricos. Esta definición equivale a decir que \vec{M} es el número neto por unidad de volumen de dipolos efectivamente alineados con B.

Consideremos un cubo que contiene un cierto número de dipolos magnéticos atómicos alineados según el campo magnético externo. Mas correctamente, como no todos los dipolos están alineados con el campo \vec{B} , los dipolos de la figura representan la alineación neta, efectiva es decir la magnetización neta del cubo. Si quisiésemos calcular el campo que estos dipolos crean en un punto muy alejado del cubo, sabemos por las propiedades de

los dipolos magnéticos, que este campo podría ser creado por una "espira equivalente" formada por una corriente de magnetización i_{mag}



que recorriese un perfil del cubo como indica la figura. El campo producido puede ser el mismo debido a esta espira alrededor del cubo que debido a los dipolos atómicos. El momento del dipolo alrededor del cubo será

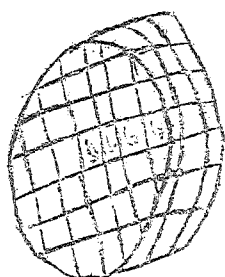
$$p_m = i_{\text{mag}} \cdot A$$

Entonces la magnetización M ó momento magnético resultante por unidad de volumen debe ser

$$M = \frac{p_m}{lA} = \frac{i_{\text{mag}}}{l} = j_{\text{mag}} \quad (\text{A} \cdot \text{m}^{-1})$$

siendo j_{mag} la densidad solenoidal de corriente de magnetización. Su significado es que circulando alrededor del cubo produce el mismo momento magnético que la suma de los dipolos magnéticos individuales.

Podemos extender esta idea considerando ahora un cilindro de material de superficie lateral cualquiera. Lo podemos suponer compuesto por rebanadas cada una de las cuales está formada por cubos idénticos a los estudiados anteriormente por una corriente de magnetización i_{mag} . Los efectos de las



corrientes en el interior del cilindro se cancelan quedando únicamente las corrientes alrededor de la superficie exterior. La magnetización por unidad de volumen es la misma en el cilindro y en el cubo, pero aquí la corriente de magnetización circula por la cara externa del cuerpo total.

Es decir para tomar en cuenta la variación del \vec{B} creado por el solenoide después de la introducción de la materia habrá que escribir:

$$\text{en el vacío} \quad B = \mu_0 j_s$$

$$\text{en la materia} \quad B = \mu_0 (j_s + j_{\text{mag}})$$

ó bajo la ley de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

$$\text{y} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i + i_{\text{mag}})$$

es decir i_{mag} representa una corriente hipotética que produciría la misma \vec{B} que se produce ahora con el núcleo de una cierta materia.

Estas corrientes de magnetización se suelen llamar también corrientes superficiales de Ampère.

Antes hemos encontrado que el módulo de la magnetización era igual a la corriente de magnetización por unidad de longitud tomada perpendicularmente. Era lo que habíamos denominado densidad solenoidal de corriente de magnetización.

$$M = j_{\text{mag}} = \frac{i_{\text{mag}}}{l}, \quad i_{\text{mag}} = M l$$

En general se puede demostrar que para cualquier configuración

$$i_{\text{mag}} = \oint \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

la ley de Ampère se puede escribir ahora

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \oint \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

Es decir hemos visto que la inducción magnética B depende ahora de la corriente física, real, externa, que circula por la bobina y de la magnetización de nuestro cuerpo, que equivale a una cierta corriente de magnetización ficticia.

La ley de Ampère se puede escribir también

$$\oint \left(\frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{l} = i$$

quedando ahora la cantidad entre paréntesis dependiendo únicamente de la verdadera corriente i , sin tener en cuenta la de magnetización. Dada la importancia de este término se le da un nombre especial, intensidad de campo magnético \vec{H} , o sea

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0}$$

que se puede escribir

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

con lo que la ley de Ampère queda en forma sencilla

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = i$$

Si el solenoido está vacío, $M = 0$ y $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

con lo que \vec{B} y \vec{H} difieren en un factor constante. \vec{H} ignora los efectos de la materia como lo hace \vec{B} .

Igual que hicimos en dieléctricos, podemos suponer que en ciertos medios existe proporcionalidad entre la magnetización M y la intensidad H en ese punto. Así para estos materiales

$$\vec{M} = \chi_n \vec{H}$$

donde X_n es la susceptibilidad magnética con lo que

$$\vec{B} = \mu_0 \left(1 + X_n \right) \vec{H}$$

y llamando

$$\mu = \mu_0 \left(1 + X_n \right) \quad \text{permeabilidad magnética de nuestro medio.}$$

queda

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Suele ser útil definir una permeabilidad relativa μ/μ_0 .

Queda por último una clasificación de los materiales por su valor de X_n . Observemos que X_n es en definitiva una medida del

alineamiento de los dipolos atómicos bajo la acción de un campo magnético externo. Pensemos que dado un material con N átomos por unidad de volumen la magnetización máxima será N veces la del dipolo magnético atómico. Sin embargo el proceso de alineamiento es francamente difícil dadas las vibraciones térmicas del material. Así el material adquiere un momento magnético al colocarse en un campo magnético externo, pero este momento es mucho menor que el máximo.

Clasificaremos a los materiales en paramagnéticos si X_n es positiva pero mucho menor que 1, lo cual indica que $\mu > \mu_0$; en diamagnéticos si X_n es negativa y pequeña comparada con la unidad, es decir $\mu < \mu_0$ y ferromagnéticos en que X_n es positiva y grande pero no constante, con lo que $\mu \gg \mu_0$.

8.12.- Condiciones de contorno para \vec{B} y \vec{H} .

A partir de su definición, resulta obvio que el vector magnetización se anula en ausencia de materia. Las condiciones de contorno para los vectores \vec{B} y \vec{H} se pueden encontrar por un procedimiento análogo al utilizado en dieléctricos.

Sean dos materiales de permeabilidades μ_1 y μ_2 . Las ecuaciones que rigen los campos en la superficie de separación de ambos son

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

ya que las líneas de \vec{B} son cerradas y no existen cargas magnéticas, y

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

Si suponemos que por el interior de nuestro material no circula ninguna corriente física real. Aplicando ambas ecuaciones a recintos análogos a los vistos en 8.6 se llega a

$$B_{1n} = B_{2n} \quad , \quad H_{1t} = H_{2t}$$

Es decir existe continuidad de las componentes normales de la inducción y de las tangenciales de la intensidad de campo magnético.

Estas condiciones son análogas a las encontradas para D y E en dieléctricos. Por analogía, para una incidencia oblicua sobre la superficie de separación

$$\frac{\operatorname{tg} \phi_1}{\operatorname{tg} \phi_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

813- Almacenamiento de energía en un campo magnético.

Sea una bobina de autoinducción L por lo que deseamos circular una corriente i . La energía que hay que gastar para ello es la energía que se requiere para crear un campo magnético en el espacio interior del solenoide. Si la corriente ha de pasar de 0 a i , según cualquier función, en cada instante la fem. inducida será

$$V(t) = -L \frac{di(t)}{dt}$$

si en ese instante t se quiere desplazar la carga dq desde el generador hasta la bobina hará falta realizar un trabajo

$$dT = -Vdq = L \frac{di}{dt} dq = L i di$$

luego

$$T = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2$$

Igual que sucedía en el caso del condensador esta energía se supone almacenada en ese campo magnético creado por la bobina y el valor

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

Entonces también podemos hablar de una densidad de energía almacenada

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2} L I^2}{lA} &= \frac{\frac{1}{2} \frac{N^2 B^2 A}{I} I^2}{lA} = \\ &= \frac{B^2}{2\mu_0} \text{ Julios. m}^{-3} \end{aligned}$$

para el caso del vacío.

Argumentos idénticos podemos tener para el caso de que la bobina esté rellena de un cierto material de permeabilidad

$$\frac{T}{\text{vol}} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} B H = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad \text{J/m}^3$$

8.14- Magnetismo en la materia- Generalidades -

El diamagnetismo es una característica que se presenta en todas las sustancias. La aparición del paramagnetismo y de todos los otros tipos de magnetismo es el resultado del hecho de que muchos átomos poseen momentos magnéticos permanentes que se contraponen a los efectos diamagnéticos.

Los momentos magnéticos permanentes se deben a tres causas:

- a) el momento magnético del dipolo orbital de los electrones
- b) el momento magnético del spin de los electrones
- c) el momento magnético del núcleo.

Así cualquier sustancia que tenga dipolos magnéticos habrá efectos paramagnéticos y diamagnéticos, pero los paramagnéticos predominan usualmente.

Si pensamos en el alineamiento de los momentos magnéticos individuales, encontraríamos mediante el cálculo que las fuerzas magnéticas son tan pequeñas que los movimientos térmicos destruirían este alineamiento aún a temperaturas tan bajas como centésimas de grado Kelvin. Así sería imposible a la temperatura ambiente tener una alineación permanente de los momentos.

Pero por otra parte esto es lo que sucede en el hierro: los dipolos se alinean. Hay una fuerza efectiva entre los momentos magnéticos de los distintos átomos del hierro que es mucho mayor que la "interacción magnética directa". Este efecto indirecto sólo puede explicarse por Mecánica Cuántica. Es unas cien mil veces mayor que la interacción directa y es la responsable del alineamiento de los momentos de los materiales ferromagnéticos.

Aunque nosotros demos una explicación o introducción al paramagnetismo y diamagnetismo, debemos aclarar que no es posible entender los efectos magnéticos de los materiales desde el punto de vista de la Mecánica Clásica. Insistimos en que los efectos magnéticos son de naturaleza enteramente mecánico-cuántica. De todas maneras la mecánica clásica nos dará algunas ideas de lo que puede suceder.

8.15.- Paramagnetismo.

La característica esencial del paramagnetismo es que su susceptibilidad magnética, χ , es positiva pero mucho menor que la unidad.

Podemos imaginar la situación de la siguiente manera. Sabemos que los dipolos magnéticos que pueda tener el material pueden tener su origen en el movimiento orbital del electrón, en su spin y en el núcleo. Puede suceder que la resultante de todos los dipolos sea cero de manera que el material tenga una magnetización inicial nula. Además en circunstancias normales, las vibraciones aleatorias de los dipolos dando una media nula. Cuando apliquemos un campo magnético exterior se ejercerá una fuerza sobre esos dipolos que tenderá a alinearlos con \vec{H} y habrá una magnetización \vec{M} .

Podemos tener una medida del grado de alineamiento de nuestros dipolos comparando la energía térmica de los mismos ($3kT$) o energía cinética media de los átomos del sólido a la temperatura T y el trabajo que tiene que desarrollar el campo para alinear un dipolo que estaba antialineado, es decir

$$f = \frac{\mu_n B}{3 k T}$$

siendo k la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta.

Entonces podemos suponer que la magnetización del material será proporcional a este factor f y dependerá también del número teórico máximo de dipolos alineables, es decir

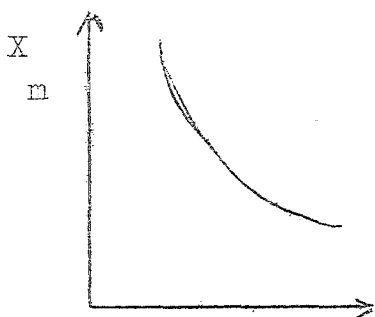
$$M = N p_n f = \frac{N p_n^2 B}{3 k T}$$

Si estamos tratando con materiales paramagnéticos en que \bar{H} es muy pequeño respecto a \bar{H} , podemos sustituir B por $\mu_0 H$, quedando

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{4 N \mu_0 p_n^2}{3 k T} = \frac{C}{T}$$

Esta dependencia de la susceptibilidad de los materiales paramagnéticos con T^{-1} es la llamada ley de CURIE.

Gráficamente queda indicada en la figura



Podemos concluir diciendo que en los materiales paramagnéticos su magnetización es muy débil, con susceptibilidades del orden de 10^{-3} , con lo que difiere en menos de un 1%.

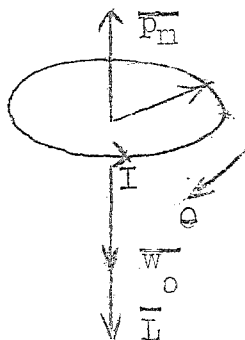
8.16- Diamagnetismo. T

En el paramagnetismo había una magnetización débil pero positiva que indica un pequeño grado de alineamiento de los dipolos con el campo exterior.

El diamagnetismo representa la situación contraria: existen ciertas sustancias en que al aplicar un campo exterior el resultado neto es una magnetización negativa y por tanto una susceptibilidad magnética negativa, aunque pequeña en módulo. Además esta susceptibilidad es independiente de la temperatura.

El fenómeno es mecánico-cuántico pero podemos dar una formulación válida mediante consideraciones clásicas.

La susceptibilidad negativa puede ser entendida a partir del movimiento de los electrones en sus órbitas cuando se aplica un campo exterior. Pensemos en un electrón que describe una órbita de radio r con velocidad angular ω . El momento magnético asociado con este pequeño dipolo magnético será



$$p_n = i S = -e \frac{\omega_0}{2\pi} \pi r^2 = -\frac{e \omega_0}{2} r^2$$

El momento angular del electrón valdrá

$$\bar{L} = \bar{r} \times m \bar{v} = m r^2 \bar{\omega}_0$$

Con lo que vemos existe una relación entre su momento magnético y el angular.

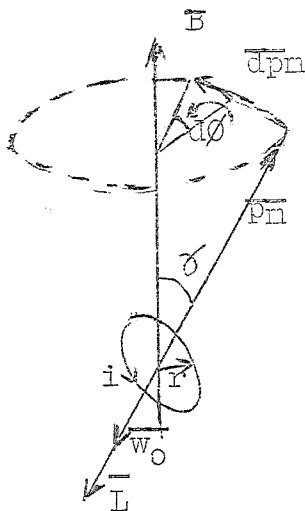
$$\overline{p}_n = - \frac{e}{2m} \overline{L}$$

Supongamos que ahora aplicamos un campo magnético exterior \overline{B} que forme una dirección cualquiera con \overline{L} . El campo ejerce un momento sobre el dipolo de valor

$$\overline{M} = \overline{p}_n \times \overline{B}$$

que según la segunda ley de Newton para rotación debe ser igual a la variación del momento angular

$$\overline{M} = \frac{d\overline{L}}{dt} = \overline{p}_n \times \overline{B}$$



Esta ecuación es análoga a la del movimiento del trompo. La órbita del electrón no permanece estacionaria respecto a \overline{B} , aunque admitamos que no varía su forma. Los vectores momento angular y magnético sufren un movimiento de precesión denominada precesión de LARMOR.

En efecto poniendo \overline{L} en función de \overline{p}_n , vemos que al cabo de un instante dt \overline{p}_n ha variado en

$d\overline{p}_n$ podemos suponer perpendicular a \overline{p}_n y mucho menor en módulo. \overline{p}_n precesiona así alrededor de \overline{B} variando

de dirección pero no de módulo.

La velocidad angular de precesión denominada velocidad de LARMOR valdrá

$$\frac{\omega}{L} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{dp_n}{p_n \sin \alpha dt} = \frac{dL}{L \sin \alpha dt}$$

valiendo

$$dL = p_n B \sin \alpha dt$$

$$\frac{\omega}{L} = \frac{p_n B \sin \alpha}{L \sin \alpha} = - \frac{e}{2m} B$$

Esta velocidad angular adicional debida a la precesión da lugar a un momento magnético inducido. En efecto la variación del plano orbital puede equipararse a una determinada espira de un cierto área, A' , que habría que determinar. Ese momento magnético inducido valdrá para los Z electrones del átomo

$$p_{ind} = i A' = e \frac{\omega_L}{2\pi} A' Z$$

luego este momento magnético inducido tiene dirección contraria a \overline{B} . Esta oposición del momento magnético inducido es la constante de la susceptibilidad negativa del diamagnetismo.

La magnetización será

$$M = e \frac{\omega_L}{2\pi} A' N Z$$

Siendo N el número de átomos por unidad de volumen. La susceptibilidad será por tanto

$$\chi = \frac{M}{N} = - \frac{Z e^2 N}{4 \pi m} A'$$

siendo esta la expresión de LANGEVIN para el diamagnetismo.

Pensemos en un material cuando no actúa ningún campo externo. Si los átomos tienen posiciones aleatorias y dado que en las órbitas hay electrones que viajan en sentidos contrarios, los efectos magnéticos de estos movimientos orbitales se anulan entre sí. Cuando aplicamos un campo externo si la movilidad de los átomos no cambia el efecto magnético orbital sigue siendo nulo y solo quedan los momentos magnéticos inducidos que, para cualquier orientación de la órbita, tienen dirección contraria al campo.

Los efectos diamagnéticos son independientes de la orientación de los átomos, su agitación térmica y por lo tanto de la temperatura. Como las susceptibilidades paramagnéticas decrecen con la temperatura resultará que todos los materiales se vuelven diamagnéticos a una temperatura suficientemente elevada.

Hemos visto como hasta ahora dado que la susceptibilidad puede proceder de una serie de términos independientes, es difícil predecir si un metal determinado será diamagnético o paramagnético.

8.17.- Ferromagnetismo.

Experimentalmente, conocemos que el comportamiento magnético del hierro, cobalto, níquel y de una gran variedad de aleaciones es único. La susceptibilidad es positiva y muy elevada, indicando que existe un alto grado de alineamiento de los momentos magnéticos atómicos a pesar de sus movimientos térmicos. Es más, estos materiales pueden poseer una magnetización espontánea elevada en ausencia de campo magnético aplicado. Como precisaremos posteriormente, esta situación indica la existencia de una fuerza especial, muy intensa, entre momentos magnéticos adyacentes y de naturaleza cuántica. El punto de Curie T_C es la temperatura por encima de la cual desaparece esta interacción interatómica.

Si en una sustancia paramagnética se introdujese una fuerza que tienda a alinear los momentos magnéticos atómicos, tendríamos un material ferromagnético. Fue Pierre Weiss quien primero postuló la existencia de esta fuerza en una sustancia ferromagnética. Esta fuerza debe superar los efectos desordenadores de la energía térmica. Esta fuerza de Weiss se puede imaginar como equivalente a un campo H_E actuando sobre los momentos magnéticos individuales. Weiss demostró que con esta hipótesis se podían demostrar varias propiedades del ferromagnetismo a condición de admitir que H_E fuese proporcional a la magnetización

$$H_E = \lambda M$$

siendo λ una constante denominada constante del campo de WEISS. La comprobación experimental de la desaparición del alineamiento por encima de la temperatura de Curie, nos induce a formular un comportamiento paramagnético

$$\frac{M}{H_T} = \frac{C}{T}$$

siendo H_T la intensidad magnética total, campo aplicado H mas cam-

po Weiss H
E

$$\frac{M}{H + \lambda M} = \frac{C}{T}$$

$$X = \frac{M}{H} = \frac{C}{T - C\lambda} = \frac{C}{T - T_C} \quad (8,9)$$

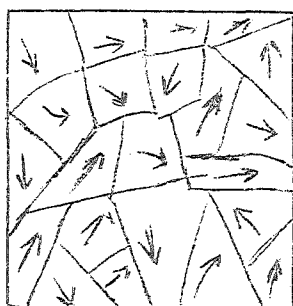
siendo T_C la temperatura de Curie $T_C = C$

La expresión (8,9) llamada ley de Curie-Weiss describe perfectamente la ~~variación~~ variación de susceptibilidad observada en la región paramagnética por encima del punto de Curie.

Para el hierro la temperatura de Curie es de 1043°K.

El origen físico del campo de Weiss se encuentra en la integral de intercambio de la mecánica cuántica, como demostraron Frankel y Heisenberg. Esta fuerza de intercambio es una acción entre los spins de dos átomos adyacentes. Además esta integral de intercambio puede ser positiva o negativa de manera que los spins se alineen o antialineen por fases. En el ferromagnetismo es positiva y los momentos se alinean.

Si esta fuerza cuántica entre momentos magnéticos existiese entre todos los átomos del material, la magnetización del material sería siempre máxima, de saturación, aún en ausencia del campo magnético aplicado. Sin embargo no es esta la situación señalada por la experiencia. Weiss explicó esta diferencia suponiendo que las sustancias ferromagnéticas reales están compuestas de un cierto número de pequeñas regiones, llamadas dominios magnéticos, en cada uno de los cuales el alineamiento es total y la magnetización es la de saturación. Las direcciones de los dominios no son necesariamente paralelas y, como indica la figura, en el interior del material el vector magnetización



cambia de dirección de un dominio a otro. El resultado neto global puede ser una magnetización muy pequeña o bien grande en los imanes permanentes.

Cuando se aplica un campo magnético exterior, el incremento de M que resulta se debe a dos procesos independientes: por un aumento del tamaño de los que tenían orientación con el campo a expensas de los dominios mal orientados y por una rotación de las direcciones de orientación acercándose se más a la del campo.

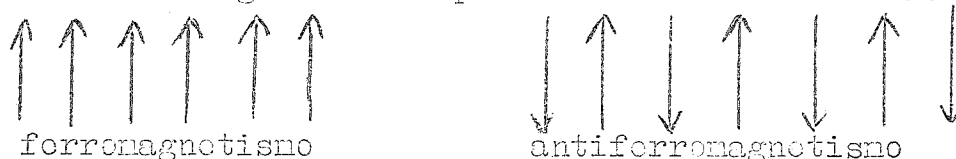
La estructura y tamaño de los dominios magnéticos tiene repercusiones en las propiedades técnicas de los materiales ferromagnéticos. Un material puro, monocristalino, homogéneo facilitará el desplazamiento de los dominios y permitirá obtener permeabilidades elevadas.

Otra característica de los materiales ferromagnéticos es la no linealidad entre la magnetización y el campo H aplicado. Dado que $B = \mu_0 (H + M)$ y M es muy grande, la relación usual entre B - H de un

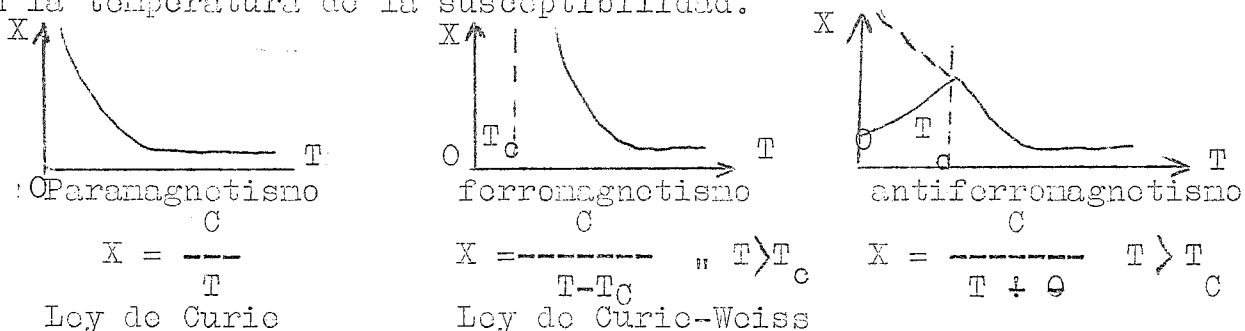
material ferromagnético puede representar también la variación de la magnetización con H . La histéresis aparece como consecuencia de que los dominios no regresan a sus posiciones originales cuando el campo vuelve a su valor primitivo. La remanencia nos indica la magnetización en ausencia de campo exterior como indica (8,9).

8.18- Antiferromagnetismo y ferrimagnetismo.

En las sustancias antiferromagnéticas la integral de intercambio es negativa, es decir el acoplamiento entre parejas de momentos es tal que se antialinean. Hay un antiparalelismo entre momentos adyacentes. En la figura se comparan ambas distribuciones.



Estos materiales exhiben muy poco magnetismo externo en conjunto. El antiferromagnetismo se reconoce por la existencia de un máximo bien definido en la curva que representa la susceptibilidad en función de la temperatura. En la figura se comparan las variaciones con la temperatura de la susceptibilidad.



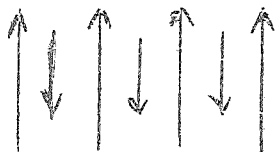
La temperatura por debajo de la cual se produce el antiparalelismo entre los momentos se suele denominar temperatura de Néel. Esta temperatura nos indica por tanto la transición hacia un comportamiento paramagnético.

Se suele admitir que la variación de la susceptibilidad es de la forma

$$X = \frac{C}{T + \Theta}, \text{ siendo válida}$$

por encima de la temperatura T en que existe el máximo.

En las sustancias ferrimagnéticas, oje. de gran importancia técnica son las ferritas, existe un antiparalelismo entre los pares de momentos magnéticos pero la compensación no es total.



La fórmula química de las ferritas es $M^{2+}_x Fe^{3+}_2 O_3$, en donde M es un ión metálico divalente, tal como el Mn , Co , Ni , Cu , Zn , Mg ; - pueden imaginarse como derivados de la magnetita, $FeO \cdot Fe_2O_3$, reemplazando los iones ferrosos por los iones divalentes mencionados.

Las ferritas presentan un gran interés práctico a causa de su gran resistividad eléctrica, superior en 10^6 veces por lo menos a la del hierro. Su desarrollo fue realizado en los laboratorios Philips y la teoría fue desarrollada en gran parte por Néel.

Su comportamiento en altas frecuencias es muy interesante ya que su permeabilidad pasa de ser un escalar a un tensor de segundo orden.

TABLA DE PROPIEDADES MAGNETICAS DE LA MATERIA.

TIPO	MAGNITUD de la SUSCEPTIBILIDAD	DEPENDENCIA con LA TEMPERATURA.	EJEMPLOS
DIAMAGNE- TISMO	pequeña, negativa intermedia, negati <u>v</u> a grande, negativa	independiente variación con la temperatura cuan <u>d</u> o $T < 20^{\circ}\text{K}$ existe solo por debajo de cierta temperatura.	materiales or <u>g</u> ánicos. elementos li- geros elementos al- calinos Bismuto metales super <u>c</u> onductores
PARAMAGNE TISMO	pequeña, positiva grande, positiva	independiente $X = C \frac{1}{T}$	metales alca- linos metales de - transición. tierras raras.
FERROMAGNE TISMO	muy grande, posi- tiva	$T > T_C$ $X = \frac{C}{T - T_C}$ $T < T_C$ comporta- miento - complejo.	Aleaciones tierras raras Hierro Cobalto Niquel
ANTIFERRO- MAGNETISMO	pequeña, positiva	$T > T_N$, $X = \frac{C}{T + \theta}$ $T < T_N$, $X \propto T$	sales de ele- mentos de tran- sición Cromo MnO 2
FERRIMAGNE TISMO	grande, positiva	$T > T_N$, $X = \frac{C}{T + \theta}$	Ferritas

8.7(bis).- ALMACENAMIENTO DE ENERGIA EN UN CAMPO ELECTROSTATICO.

Energía electrostática.- Una carga finita concentrada en una región - tan pequeña que pueda ser considerada de tamaño despreciable con respecto a las otras dimensiones macroscópicas se denominará carga puntual. La fuerza ejercida sobre tal carga q en el campo de una distribución estacionaria de carga es $q \vec{E}$, de donde el trabajo realizado en un desplazamiento de q de un punto $r=r_1$, a otro $r=r_2$ es

$$W = q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$
 ya que el rotacional de \vec{E} es nulo en todos los puntos de un campo electrostático, el vector \vec{E} es igual al gradiente negativo de un potencial escalar V , y tenemos

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = - \nabla V \cdot d\vec{l} = - dV$$

donde dV es el cambio en el potencial a lo largo de un elemento ds del camino de integración. De aquí se deduce claramente que el trabajo realizado en un desplazamiento de q de \vec{r}_1 a \vec{r}_2 es independiente del camino elegido, siendo función realmente de los puntos inicial y final.

$$W = -q \int_{r_1}^{r_2} dV = q [V(r_1) - V(r_2)]$$

en particular, el trabajo realizado en un desplazamiento cerrado es nulo.

Un caso particular del anterior es cuando el trabajo se realiza trasladando una carga q de un punto \vec{r}_0 al infinito. Por ello

$$W = q (r)$$

Usaremos el término energía de un sistema electrostático para designar el trabajo realizado en el sistema para llevar un elemento desde el infinito a sus posiciones específicas en el mismo. Veamos la energía de dos casos particulares y generalicemos al más amplio.

Sea el sistema constituido por dos cargas q_1 y q_2 separadas una distancia r_{12} .

El potencial debido a la carga q_1 en el punto donde está situada la q_2 será V_{21} por lo que según la definición anterior, la energía del sistema será

$$V = q_1 V_{21}$$

Mas igualmente la energía será el producto de la carga q_1 por el potencial debido a q_1 en el punto donde está q_1 , esto es : $V = q_1 V_{12}$

Se ve que evidentemente son iguales, con solo aplicar el potencial creado por una carga puntual, que recordamos era de la forma

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r}$$

Como son iguales, podemos poner tambien la energía del sistema co
mo

$$U = \frac{1}{2} (q_1 V_{12} + q_2 V_{21})$$

veremos luego la justificación de este paso.

Si al sistema anterior le agregamos una nueva carga q_3 el trabajo necesario para llevarla desde el a a un punto donde el potencial es suma de los debidos a las dos cargas ya situados en el sistema $V_{31} V_{32}$, será

$$W = q_3 (V_{31} + V_{32})$$

de donde la energía total del sistema será ahora

$$U = q_2 V_{21} + q_3 (V_{31} + V_{32})$$

Veamos ahora que nos hubiera resultado si hubieramos multiplicado ca
da carga por el potencial en el que se encuentra sometida. Sería.

$$M = q_1 (V_{12} + V_{13}) + q_2 (V_{21} + V_{23}) + q_3 (V_{31} + V_{32})$$

como se verifica evidentemente que

$$q_1 V_{12} = q_2 V_{21}$$

$$q_1 V_{13} = q_3 V_{31}$$

$$q_2 V_{23} = q_3 V_{32}$$

resulta inmediatamente que $M = 2 U \rightarrow U = \frac{1}{2} M$

Esto se generaliza facilmente a un número n de cargas y podemos po
ner entonces

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij} q_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i q_i$$

donde V_i es el potencial en q_i debido a las $n - 1$ cargas restantes del siste
ma.

(4) se encuentran situadas en un campo de potencial V_0 , aparece un término que no

La ecuación anterior es sólo válida si el sistema es completo o ce
rrado. Si por el contrario, las n cargas (V_0) vendrá afectado del factor $1/2$, que
dando así :

$$U = 1/2 \sum_{i=1}^n V_i q_i + \sum_{i=1}^n V_0 q_i$$

Consideremos ahora una región V en la que se haya situado un material

dieléctrico con una densidad en volumen de carga ρ . Una carga elemental dq vendrá dada por $dq = \rho dv$.

La energía del sistema podrá ponerse así como

$$U = 1/2 \int_V \rho \cdot V dv$$

que será la energía de un volumen V de dieléctrico en función de su densidad de volumen ρ de carga y de la distribución de potencial dentro del mismo. -
Tratemos de ponerla en función del campo dieléctrico.

Según el teorema de Gauss se verifica que

$$1 \quad \int \vec{D} \cdot \vec{dS} = q = \int \rho dv \quad ; \quad \int \nabla D dv - \int \rho dv = 0 \quad ; \quad \int (\nabla \cdot \vec{D} - \rho) dv = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

sustituyendo arriba queda

$$U = 1/2 \int (\nabla \cdot \vec{D}) V dv$$

como se tiene que

$$\nabla \cdot (\vec{D} \cdot \vec{V}) = V \nabla \cdot \vec{D} + \vec{D} \cdot \nabla V = V \nabla \cdot \vec{D} - \vec{D} \cdot \vec{E}$$

$$(\nabla \cdot \vec{D}) V = \nabla \cdot (\vec{D} \cdot \vec{V}) + \vec{D} \cdot \vec{E}$$

de donde

$$U = 1/2 \int \nabla \cdot (\vec{D} \cdot \vec{V}) dv + 1/2 \int \vec{D} \cdot \vec{E} dv$$

veamos la primera integral. Podemos pasarla a una integral de superficie quedando

$$\int (\vec{D} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{dS}$$

Si la superficie que rodea al volumen considerado se extiende al inf finito incrementará con el radio como r^2 ($S = 4\pi r^2$), \vec{D} y V en cambio disminuirán como $1/r^2$ y como $1/r$ respectivamente ($D = 1/4\pi\epsilon q/r^2$; $V = 1/4\pi\epsilon q/r$). Por ello el producto triple que aparece bajo la integral disminuirá como $1/r$ cuando $r \rightarrow \infty$ por lo que la dicha integral se hará cero. Con ello queda

$$U = 1/2 \int \vec{D} \cdot \vec{E} dv$$

como energía almacenada en el campo electrostático interior a un dieléctrico

Si es $D = E$ quedará, finalmente.

$$U = 1/2 \int \epsilon E^2 \cdot dv$$

T E M A IX

Introducción a la Mecánica

Cuántica.

9.1.- Introducción

Según nuestra teoría clásica un sistema físico puede ser descrito por un conjunto de variables dinámicas tales que cada una de ellas posee en cada instante un valor preciso, exacto. La evolución del sistema puede ser descrito por las variaciones de estas variables dinámicas.

La mecánica de Newton nos daba los medios para gobernar esas variables dinámicas mediante unas ecuaciones diferenciales.

Con estas hipótesis y esta Mecánica de Newton, la Física progresó rápidamente y sin encontrar contradicciones hasta finales del siglo XIX. Fue entonces, cuando se empezaron a estudiar fenómenos físicos que sucedían en el mundo microscópico, cuando la Física Clásica encontró numerosas dificultades para poder explicar lo que los experimentos mostraban. Rápidamente se llegó a la conclusión de que los fenómenos a escala atómica y subatómica no pueden ser descritos por la doctrina clásica y que su explicación debe hacerse mediante principios enteramente nuevos. Tras sucesivas tentativas para formular esta "nueva Física", en 1925 se fundamentó la Mecánica Cuántica capaz de dar una teoría coherente de los fenómenos microscópicos.

Vamos a pasar revista a los experimentos principales que señalaban la necesidad de abandonar las ideas clásicas.

Los primeros experimentos que ponían de manifiesto la estructura íntima de la materia fueron los relacionados con las descargas en gases enrarecidos, rayos catódicos, y el descubrimiento del electrón por THOMSON (1897) como responsable de esos rayos catódicos. Con estos experimentos va tomando realidad lo que al principio era una hipótesis de trabajo: la existencia de átomos, moléculas y de sus partículas constituyentes.

Un nuevo capítulo de la Física se abre en 1896 con el descubrimiento de la radioactividad. Esta es la primera manifestación sobre la existencia del núcleo en los átomos. Los rayos α que emiten los cuerpos radiactivos fueron utilizados además para la investigación de la estructura atómica. Tras notables experiencias con estos rayos α , RUTHERFORD emite en 1911 su teoría del átomo: átomo compuesto de un núcleo central de pequeñas dimensiones

-13 -12
(10^{-13} a 10^{-12} cm), con casi la totalidad de la masa del átomo, con una carga positiva Ze y alrededor del cual giran un cierto número Z de electrones. El átomo de Rutherford semeja un sistema solar en miniatura en que las fuerzas gravitatorias serían reemplazadas por las culombianas.

Por otra parte la idea ondulatoria de la radiación se va

extendiendo con el descubrimiento de los rayos X (1.895). Las primeras dificultades surgen al estudiar la interacción entre la materia y la radiación: la radiación del cuerpo negro. La radiación del cuerpo negro depende únicamente de la temperatura de ese cuerpo con exclusión de cualquier otra propiedad. La distribución espectral de esta radiación obtenida por los métodos de la termodinámica clásica está en completo desacuerdo con la experiencia. En 1.900, PLANCK decide superar la dificultad renunciando a las leyes clásicas de interacción entre materia y radiación. Emite la hipótesis de que los intercambios de energía entre materia y radiación no se efectúan de manera continua sino por cantidades discretas e indivisibles o cuantos de energía. Demostró además que ese quantum de energía debía de ser necesariamente proporcional a la frecuencia ν de la radiación.

$$E_{\nu} = h \nu \quad (9.1)$$

y obtuvo una expresión del espectro de acuerdo con la distribución experimental ajustando convenientemente la constante h de proporcionalidad. Esta constante h es desde entonces conocida como la constante de Planck y sus dimensiones son energía por tiempo. Su valor es

$$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (9.2)$$

Cuando su publicación la hipótesis de PLANCK no fué aceptada, pero fué confirmada posteriormente por otros experimentos que mostraban discontinuidades o cuantificación a escala microscópica donde la teoría clásica prevía una continuidad.

9.2- El efecto fotoeléctrico.

Se designa con este nombre la emisión de electrones por un metal alcalino cuando se ilumina su superficie por una radiación ultravioleta. La intensidad de corriente eléctrica producida depende de la intensidad de la radiación recibida por el metal. Por el contrario, la velocidad de los electrones emitidos no depende de la intensidad de la radiación sino de su frecuencia y cualquiera que sea la distancia del foco luminoso. Además no se emiten electrones para cualquier tipo de luz que ilumine el metal sino exclusivamente para aquellas frecuencias superiores a un cierto valor característico de cada metal. (frecuencia umbral o de corte).

La explicación de EINSTEIN fué sencilla. Postuló que la radiación luminosa era, en sí misma, un chorro de partículas, fotones de energía $h \nu$ y de velocidad c (velocidad de la luz en el vacío $3 \times 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$). Entonces cualquiera que sea la distancia recorrida por la luz desde su emisión, esta se presenta bajo la forma de corpúsculos de energía $h \nu$. Cuando uno de estos fotones encuentra un electrón del metal es enteramente absorbido por éste al que comunica su energía $h \nu$. Para que el electrón pueda abandonar el metal debe vencer el potencial "que lo tiene encerrado", la función trabajo W del metal, tal que, si sale del metal, tendrá una energía cinética.

$$\frac{1}{2} m v^2 = h \nu - W \quad (9.3)$$

Entonces para un metal dado W es una constante y v depende únicamente de la frecuencia de la radiación. Por debajo de un cierto valor ($---$) de la frecuencia de la radiación no se podrá liberar ningún electrón por fotoemisión.

9.3- El efecto Compton.- El efecto Compton es otra confirmación de la teoría del fotón en detrimento de la teoría ondulatoria. En 1.924 Compton observó la dispersión de rayos X por electrones libres de un bloque de grafito y encontró que la longitud de onda de la radiación dispersada es superior a la incidente. La diferencia $\Delta \lambda$ es función del ángulo θ entre la dirección de propagación de la radiación incidente y aquella en la cual se observa la dispersión según la fórmula.

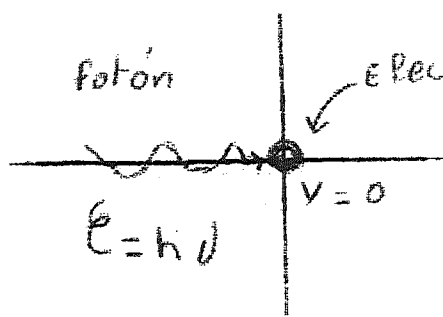
$$\Delta \lambda = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (9.4)$$

Se observa como $\Delta \lambda$ es independiente de la longitud de onda incidente.

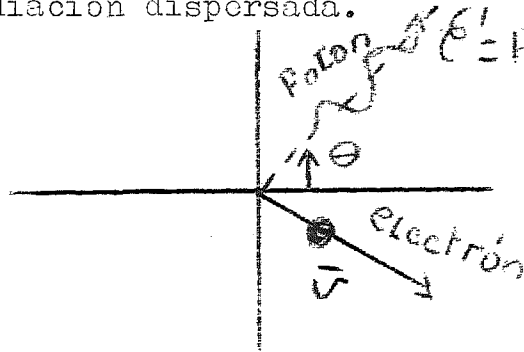
Se demostró que este fenómeno es producido por la colisión elástica entre fotones y electrones del medio irradiado.

La presencia de una onda dispersada de longitud de onda $\lambda' > \lambda$ no se puede entender si los rayos X incidentes se consideran como una onda electromagnética clásica. De acuerdo con esta idea, la onda incidente de frecuencia ν hace que los electrones en el bloque dispersador oscilen a esa misma frecuencia. Estos electrones oscilantes radian ondas electromagnéticas que a su vez tienen esa misma frecuencia ν . Entonces, según el modelo ondulatorio clásico la onda dispersada debería tener la misma frecuencia y la misma longitud de onda λ que la onda incidente.

Compton pudo explicar sus resultados experimentales suponiendo que el haz de rayos X incidentes no era una onda sino un chorro de fotones de energía $h\nu$ y que estos fotones experimentaban choques con los electrones libres del bloque dispersador. Los fotones "de rechazo" constituirán la radiación dispersada.



antes del choque



después del choque.

Puesto que el fotón incidente transmite algo de su energía al electrón contra el cual choca, el fotón dispersado debe tener una energía inferior a la incidente y por consiguiente una frecuencia menor.

9.4- Espectros.- Los cuerpos sólidos y gaseosos emiten radiación al ser calentados. La radiación puede ser estudiada con facilidad mo-

dante un espectrómetro. En el caso de sólidos incandescentes tales espectros son continuos indicadores de la existencia de toda clase de frecuencias en la radiación. Sin embargo, si se trata de un gas a baja presión a través del cual se produce una descarga eléctrica aparecen unos pocos colores en forma de rayos paralelos separados perfectamente. Cada rayo representa una radiación monocromática que ha sido desviada un cierto ángulo por el prisma a las rendijas, ángulo que depende de la frecuencia de la luz. Las longitudes de onda de los rayos son características del elemento que emite la luz. Esto es, el hidrógeno da siempre una serie de rayos en la misma posición, el sodio otra serie, etc. La estructura de rayos del espectro se extiende también a las regiones infrarroja y ultravioleta, aunque naturalmente, su detección en estos requiere el empleo de métodos fotográficos o de otro tipo.

Podría pensarse que las frecuencias de la luz emitida por un elemento particular se dispusieran de algún modo regular; por ejemplo, como un fundamental y sus armónicos. Tras una larga búsqueda el resultado fue negativo. Finalmente en 1885 BALMER encontró una fórmula empírica que daba las frecuencias de un grupo de rayos emitidos por el hidrógeno atómico.

Análogamente se encontraron espectros de absorción discretos o a rayos.

Sin embargo, según la teoría clásica, si los electrones giran en órbitas alrededor del núcleo y dado que están sometidos continuamente a la aceleración centrípeta, están radiando energía. En consecuencia, su energía cinética disminuirá gradualmente sus órbitas serían cada vez más pequeñas y llegarían a alcanzar el núcleo, describiendo una espiral y quedando en reposo en él. Además, de acuerdo con la teoría clásica, la frecuencia de la radiación emitida, por el electrón en rotación es igual a la frecuencia de revolución. Como los electrones cambian de órbita emitirían un espectro continuo en contradicción con las rayas espectrales que se observan.

Tenemos así un dilema entre una teoría electromagnética que predice un átomo inestable y emitiendo energía radiante de todas las frecuencias y la experiencia que presenta átomos estables que emiten únicamente algunas frecuencias. La conclusión es que la teoría electromagnética clásica no se podía aplicar a los efectos microscópicos.

9.5- El átomo de BOHR.

La confirmación a las ideas cuánticas de PLANCK la hizo BOHR cuando explicó algunos de los aspectos de la estructura atómica y su espectro. La explicación del átomo por BOHR consiste en una combinación de ideas clásicas y cuánticas que pueden parecer completamente arbitrarias. El siguió suponiendo que los electrones se mueven en órbitas alrededor del núcleo como se creía antes. Pero formuló tres hipótesis que había que sumar a las teorías antiguas:

1).- Los únicos radios orbitales que son posibles son aquellos para los cuales el momento angular multiplicado por 2π sea igual a un múltiplo entero de la constante de Planck.

2).- Las órbitas definidas por los radios anteriores son estables y los electrones en ellos no radian energía.

3).- Los electrones radian energía cuando se desplazan de una órbita a otra y la energía radiada obedece al postulado de Einstein $\Delta E = h \nu$, donde ΔE es la diferencia de energía entre dos órbitas y ν es la frecuencia de radiación.

Aunque estos postulados de BOHR sean arbitrarios, podían explicar los experimentos realizados y además la teoría posterior ha probado su validez.

Supongamos un átomo de hidrógeno. Será un sistema de 1 protón y 1 electrón.

La energía cinética del electrón será

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

y la aceleración centripeta está suministrada por la fuerza de Coulomb

$$\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{m} \quad (9.4)$$

Supongamos órbitas circulares, con lo que r es constante. - La energía cinética queda

$$E_c = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

La energía potencial del electrón será

$$U = V(-e) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

La energía total del electrón será

$$\epsilon = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Introduciendo el primer postulado de Bohr

$$2\pi mvr = nh$$

y utilizando (9.4a), la energía queda

$$\epsilon = -\frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 n^2 h^2}$$

La cantidad $R = \frac{-m e^4}{8 \epsilon_0 h^3 c}$ se denomina constante de Rydberg. La energía queda

$$\epsilon = \frac{-R c h}{n^2} \quad (9.4b)$$

Para $n = 1$, la energía es $-13,58$ e V. Esta energía se conoce como energía de Rydberg. El radio de esta órbita de energía mínima es

$$r = \frac{a_0}{n^2} = 0.527 \text{ \AA}$$

La diferencia de energía entre dos órbitas será

$$\Delta \epsilon = R c h \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (9.5)$$

y la longitud de onda asociada con la transición de una órbita a otra será de acuerdo con el postulado de EINSTEIN

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{\Delta \epsilon}{hc} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (9.6)$$

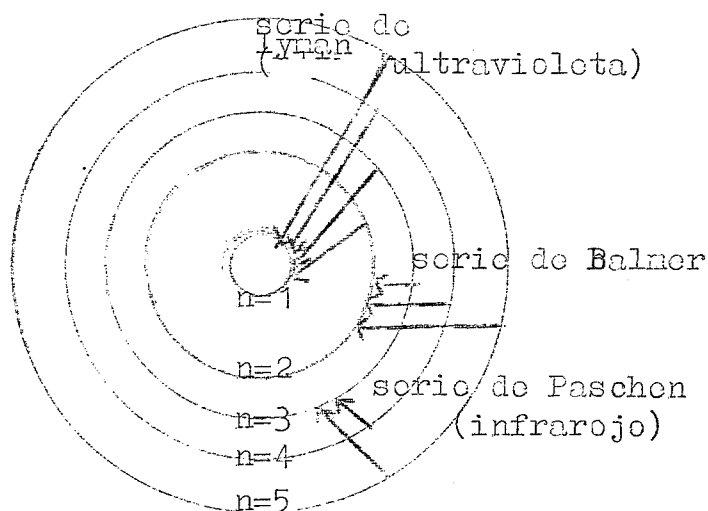
En la figura se muestra un diagrama de energías y órbitas de un átomo de H y también las transiciones más importantes entre las diversas órbitas. Este diagrama explica las series espectrales conocidas y el potencial de ionización del hidrógeno.

En general vemos que para que un electrón pase de una órbita a otra mas exterior hace falta comunicarle una energía, se absorbe energía y corresponderá a un espectro de absorción. El caso contrario ocurre cuando el átomo "cae" a una órbita más interior: emite una energía en forma de radiación.

Hemos visto como un electrón, su órbita, ~~Venía~~ especificada por un sólo número una vez que conocemos la expresión (9.4b). El número n se denomina el número cuántico del electrón en el átomo de hidrógeno. En este caso tan simplificado de un sólo electrón basta un sólo número cuántico para designar la órbita.

La expresión analítica de las series espectros es:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 2, 3, \dots \text{ serie de Lyman}$$



$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, 5, \dots \text{ serie Balmer}$$

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 4, 5, 6, \dots \text{ serie de Paschen}$$

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 5, 6, 7, \dots \text{ serie de Brackett}$$

9.6- Mecánica ondulatoria.— Los postulados de Bohr crearon un modelo atómico que permitió explicar los espectros observados del átomo de hidrógeno y de algunos otros elementos, pero para los átomos con gran número de electrones en sus órbitas y para las moléculas la teoría no es tan satisfactoria. Además, parecía no existir una buena justificación para la hipótesis de que solo son posibles aquellas órbitas en las cuales el momento angular es igual a un múltiplo de $h/2\pi$, excepto que dicha hipótesis conduce a un resultado correcto. El avance sucesivo, en cuanto a la estructura del átomo, se realizó diez años después por la sugerencia de De Broglie de que así como la luz parece tener una doble naturaleza, comportándose en unos aspectos como ondas y en otros como corpúsculos, podría suceder lo mismo con la materia. Esto es, los electrones y los protones que hasta entonces se habían imaginado como puramente corpusculares podían comportarse, en ciertas circunstancias, como ondas. El rápido desarrollo de esta idea, llevado a cabo por Heisenberg, Schrödinger y muchos otros, condujo a la llamada mecánica ondulatoria o mecánica cuántica, que ha dado a la teoría atómica unos cimientos que consideramos sólidos.

Dada la amplitud y complejidad del tema sólo podemos señalar las principales ideas, y describir algunos de los experimentos que prueban la naturaleza ondulatoria de las partículas materiales y demuestran cómo los postulados de Bohr que habían sido introducidos de una manera arbitraria, aparecen de un modo natural en el problema de la estructura atómica.

El hecho esencial de la nueva mecánica ondulatoria es, como hemos dicho, que las partículas materiales están dotadas también de propiedades ondulatorias. Cabe, pues, considerar al electrón como una especie de onda, mas o menos diseminado en el espacio y no localizado simplemente en un punto. Se ha abandonado la idea de que los electrones del átomo se mueven en órbitas de Bohr determinadas, tales como las de la figura de las series espectrales. En lugar de ello, la nueva teoría afirma simplemente que hay ciertas regiones en las cuales existe mayor o menor probabilidad de que se encuentre un electrón. La nueva teoría asigna estados de energía discretos a un átomo, como indirectamente hacia Bohr al cuantificar las órbitas del átomo de hidrógeno. En el átomo de hidrógeno son las mismas que da la teoría de Bohr, pero en átomos mas complicados a las cuáles no era aplicable dicha teoría, la mecánica ondulatoria está en excelente acuerdo con la observación.

9.7- El principio de correspondencia.- En general la forma en que una teoría física deja de ser aplicable a un problema se produce de una manera continua, dando resultados que concuerdan cada vez menos y menos con la experiencia. Debe existir una relación entre física cuántica y la física clásica y debemos encontrar las condiciones en que esta última teoría se revela como un caso particular de la primera. Así si pensamos en el átomo de hidrógeno y pensamos en la órbita para $n = 1$ su estudio debe ser totalmente cuántico, pero si damos al número cuántico un valor de 10000 el radio que sale es de 5,3 mm. Este "átomo" es tan grande que sospechamos que su comportamiento sea descrito casi exactamente por la física cuántica. El hecho de que la física cuántica se reduce a la física clásica para números cuánticos grandes se llama principio de correspondencia. Este principio se atribuye a Bohr.

9.8- La dualidad onda-corpúsculo.- La historia de la óptica moderna es en gran medida la historia de la lucha entre dos teorías: la teoría corpuscular y la teoría ondulatoria de la luz. La teoría corpuscular que representa a la luz como un chorro de partículas (corpúsculos) es normalmente atribuida a Newton. Casi al mismo tiempo en que Newton formulaba la teoría corpuscular (1.672), HUYGENS (1.678) formulaba la teoría ondulatoria de la luz. Según Huygens, la luz consiste en oscilaciones longitudinales de una "sustancia etérea" que soporta las vibraciones con una determinada velocidad de propagación finita. Según estas ideas se lograron explicaciones convincentes de los fenómenos de reflexión y refracción. La teoría ondulatoria recibió posteriores desarrollos por YOUNG, Malus and Fresnel con estudios de interferencias y polarización y llegó a su plenitud con la teoría electromagnética de la luz de MAXWELL (1865) que fué admitida universalmente tras los experimentos de HERTZ en 1.888. Debido a estos éxitos de la teoría ondulatoria, hacia principios del siglo XX la teoría corpuscular de la luz estaba prácticamente abandonada.

Pero mas tarde, en este mismo siglo, las hipótesis de Planck sobre la cuantificación de la radiación, el efecto fotoeléctrico y su explicación por Einstein, el efecto Compton hicieron admitir un comportamiento corpuscular de la luz.

Así, el resumen de la situación sobre las propiedades de la luz era el reconocimiento de que la luz posee propiedades ondulatorias y corpusculares. En ciertos fenómenos las propiedades corpusculares predominan y en otros las ondulatorias.

Uno de los significados de la expresión onda-corpúsculo es la existencia de una relación directa entre las características ondulatorias y corpusculares. Así según Planck la energía del fotón es $h\nu$ y su cantidad de movimiento según Einstein es $h\nu/c$. De donde la longitud de onda de la luz será:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{h\nu}{P_{\text{fotón}}} \quad (9.7)$$

En 1.924 el físico francés Louis de BROGLIE hizo los siguientes razonamientos: a) la naturaleza es sorprendentemente simétrica; b) nuestro universo observable está compuesto de luz y materia; c) - teniendo en cuenta la dualidad onda-corpúsculo de la luz, quizá también la materia ~~goce~~ de esa dualidad. Es decir, extendió la dualidad onda corpúsculo a los electrones y moléculas ~~asociando~~ asociando con el movimiento de cada partícula una cierta onda que caracterizase sus propiedades ondulatorias.

De Broglie supuso que la longitud de onda de las ondas de la materia debería estar dada por la misma relación aplicable a la luz

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (9.8)$$

y esta fórmula se conoce como la relación de De Broglie.

A partir de esta teoría de De Broglie, ELSASSER (1.925) dedujo que cuando los electrones pasan a través de un cristal deberían, al igual que los rayos X, presentar fenómenos de interferencia y difracción. Así expresando la energía cinética de los mismos en función del potencial acelerador,

$$\frac{m v^2}{2} = e V$$

su cantidad de movimiento es

$$p = m v = \sqrt{2 m e V}$$

y utilizando la relación de de Broglie

$$\lambda = \sqrt{\frac{150,5}{V}} \text{ \AA} \quad (V \text{ en voltios}) \quad (9.9)$$

De esta expresión se deduce que un electrón de una energía 150 e V viene caracterizado por una longitud de onda de $\lambda = 1 \text{ \AA}$. Consecuentemente, estos electrones deberían exhibir propiedades similares a las de ondas luminosas de longitud de onda $\lambda = 1 \text{ \AA}$. Esta idea fué ensayada por Davissen y Germer quienes detectaron la difracción de los electrones, argumento convincente para creer que los electrones tienen propiedades de ondas en ciertas condiciones.

La difracción de los electrones es similar a la difracción de los rayos X. Cuando un haz de rayos X pasa por una lámina de cualquier sustancia, podemos observar en una pantalla situada en el camino de los rayos dispersados un diagrama particular debido a la interferencia de los rayos difractados.

Podemos añadir que en 1.925 Goudsmit y Uhlenbeck demostraron que el electrón debería tener además de una carga eléctrica, un momento angular intrínseco y un momento magnético. Se quiso explicar esta propiedad por una rotación alrededor de su eje, pero no se pudo. Por este intento es por lo que se conoce al momento angular intrínseco del electrón como spin. Se demostró posteriormente que el spin es una propiedad en extremo importante del electrón, que juega un papel fundamental en la explicación de propiedades químicas y físicas de la materia.

Las pruebas de la existencia de ondas asociadas a la materia son concluyentes, pero también lo son las de su comportamiento

corpuscular. Se trata de corpúsculos, de materia, no de ondas. Pero debemos aceptar la dualidad de su comportamiento, unas veces como partícula y otras como onda. No es que las partículas se conviertan en ondas, sino que las leyes del movimiento en el micro mundo son de un carácter como ondulatorio.

9.9- La ecuación de ondas de Schrödinger.

Anteriormente, hemos comprobado que la difracción de los electrones se debe a los fenómenos de interferencia entre las ciertas funciones de onda asociadas a los mismos. Esta función onda asociada se designa por $\Psi(x, y, z, t)$ y su significado físico es que la cantidad Ψ^2 para un punto es una medida de la probabilidad de que la partícula esté cerca de ese punto. Así, si tenemos un volumen dV , la probabilidad de que la partícula esté en él es $\Psi^2 dV$. Como vemos se trata de una relación estadística entre onda y partícula. Se nos dice en donde es probable que la partícula esté: no nos dice donde está.

Al igual que en óptica, donde la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud y donde la onda se estudia sobre la base de las ecuaciones de Maxwell, es necesario en mecánica cuántica encontrar la ecuación que gobierne Ψ y no la densidad de probabilidad. Esta ecuación debe ser lineal ya que dos ondas que se interfieren, dan una onda resultante y para obtener interferencias, hay que sumar distintas ondas. Los sumandos y la onda resultante deben satisfacer a la misma ecuación.

Es decir debemos tener una ecuación para la función de onda de la partícula $\Psi(x, y, z, t)$.

En 1926 Schrödinger postuló una ecuación de la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U \Psi = E \Psi \quad (9.10)$$

en donde U es la energía potencial de la partícula. Si suponemos un potencial que no varía con el tiempo y un estado estacionario en la variación con el tiempo de la forma $e^{i(2\pi\nu t)}$, la ecuación anterior puede simplificarse y quedar únicamente para la variación con el espacio

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0 \quad (9.11)$$

en donde seguimos conservando el nombre Ψ para la variación espacial y E es la energía total de la partícula.

En general, la función Ψ es una función compleja.

Veremos como la cuantificación aparece de una manera análoga a como aparecían cuantificadas las frecuencias de vibración de una cuerda fija por sus extremos. Las condiciones de contorno de nuestro problema impondrán la cuantificación.

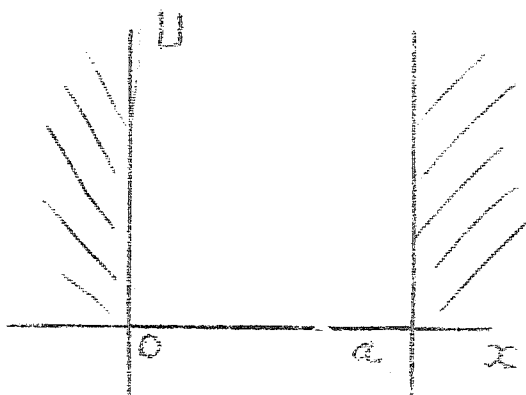
Existe una condición, llamada condición de normalización; para Ψ dado su significado de amplitud de probabilidad. En efecto, si Ψ^2 es la densidad de probabilidad y nuestra partícula sabemos

que debe estar contenida en un cierto volumen, este conocimiento - representa una probabilidad unidad de este fenómeno. Es decir

$$\int_V |\psi|^2 dV = 1 \quad (9.12)$$

que es la condición de normalización de la función de onda.

Consideremos un problema unidimensional sencillo como ejemplo de aplicación de la ecuación de Schrödinger. Supongamos una partícula obligada a moverse en un intervalo de longitud a , es decir que $0 \leq x \leq a$. Podemos imaginar esta situación pensando que en los puntos $x = 0$ y $x = a$ existen unas paredes absolutamente impenetrables que reflejan la partícula. Este tipo de ligadura puede representarse mediante la curva de potencial de la figura. $U = \infty$ para $x < 0$ y $x > a$; $U = 0$ para $0 \leq x \leq a$. Este es el llamado pozo infinito de potencial.



Para salir fuera del pozo $0 \leq x \leq a$, la partícula tendría que realizar un trabajo infinitamente grande. Entonces la probabilidad de que la partícula esté en $x = 0$ o $x = a$ es nula, luego

$$\psi(0) = \psi(a) = 0 \quad (9.13)$$

Como la energía potencial en este ejemplo es independiente del tiempo podemos escribir la ecuación de Schrödinger para variación temporal en el caso unidimensional y $U = 0$, quedando

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \psi = 0$$

Introduciendo la notación

$$\frac{8\pi^2 m E}{h^2} = k^2 \quad (9.14)$$

la ecuación de ondas queda

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -k^2 \psi$$

cuya solución es

$$\psi = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad (9.15)$$

Pero de (9.13) $\psi(0) = 0$. luego el término coseno no puede existir y $C_2 = 0$. Queda únicamente $\psi = C_1 \sin kx$ (9.16)

y con la segunda condición de contorno

$$T(a) = C_1 \sin k a = 0$$

Ecuación que tiene infinitas soluciones, tal que

$$k a = (n + 1) \pi \quad (9.17)$$

donde $0 \leq n \leq \infty$

Hemos descartado el valor $n = -1$, porque para él T es nula en todos los puntos, es una solución trivial. Sustituyendo los valores de k en su definición (9.14) queda la expresión para la energía

$$E_n = \frac{h^2}{8 m a^2} (n + 1)^2 \quad (9.18)$$

Como vemos las condiciones de contorno son tan importantes como la misma ecuación de ondas. Las condiciones de contorno no son satisfechas por todos los valores de la energía sino por unos valores que forman una serie discreta. Estos valores se llaman los autovalores o valores propios de la energía en un sistema mecánico cuántico. Las funciones de onda correspondientes a los autovalores de la energía son las autofunciones o funciones propias. El conjunto de valores propios de la energía forma el espectro de energía.

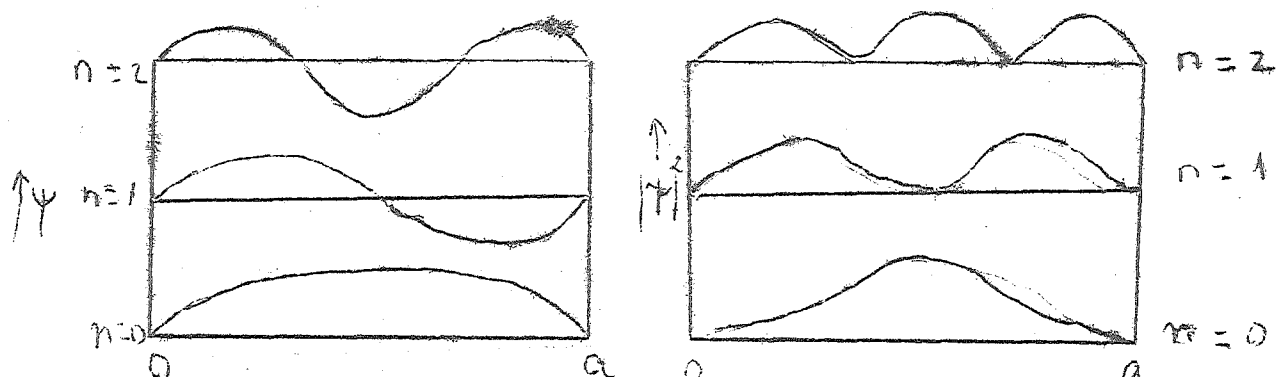
Queda por último calcular la constante C , para determinar la función de onda completamente.

De la condición de normalización tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^a |\psi|^2 dx &= C_1^2 \int_0^a \sin^2 kx dx = \\ &= C_1^2 \int_0^a \frac{1 - \cos 2 K x}{2} dx = C_1^2 \frac{a}{2} = 1 \\ C_1 &= \sqrt{\frac{2}{a}} \end{aligned}$$

luego:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n(n+1)x}{a} \quad (9.19)$$



Hemos visto, como lo hicimos en el átomo de hidrógeno según Bohr, como basta un sólo número natural n para definir un estado de la partícula, caracterizado por una función de onda y un valor de la energía. Aquí n es el número cuántico que determina el comportamiento dinámico de la partícula. Si pensásemos en un problema tridimensional es fácil intuir como harían falta tres números naturales n_1, n_2, n_3 para definir ψ , más otro número que

nos informase acerca del spin. En resumen, podemos llegar a comprender la necesidad de cuatro números cuánticos para describir el comportamiento dinámico de una partícula. Por último, hemos comprobado en un caso sencillo la cuantificación de los valores de la energía que una partícula puede tomar. En cuanto que una partícula no sea libre, su espectro de energía es discreto.

9.10- El principio de incertidumbre.

El principio de incertidumbre fué publicado por Heisenberg en 1.927. Este principio establece que es imposible especificar, con precisión y simultaneamente, los valores de ciertos pares de variables que describen el comportamiento de los sistemas físicos. Pares de variables sujetos a esta restricción son la posición y la cantidad de movimiento, la posición angular y el momento angular, la energía y el tiempo. El principio indica que el producto de las incertidumbres en el conocimiento que podemos tener de esos pares de variables debe ser, al menos, tan grande como $h/2\pi$. Analíticamente, el principio de incertidumbre se convierte en

$$\begin{aligned}\Delta x \Delta p_x &\gg h/2\pi \\ \Delta \theta \Delta L &\gg h/2\pi \\ \Delta E \Delta t &\gg h/2\pi\end{aligned}\tag{9.20}$$

Así, la posición de una partícula no puede especificarse con precisión sin pérdida de exactitud en el conocimiento de la cantidad de movimiento de la partícula. También, que no podemos medir con exactitud la energía de un sistema físico sin tener un margen de tiempo suficientemente grande para realizar la medida.

Dada la pequeñez de la constante de Planck, este principio de incertidumbre es importante sólo para partículas y dimensiones atómicas.

En efecto, dado el sentido probabilístico que muestra mecánica cuántica nos presenta, cabe preguntarse por el significado de la trayectoria de un electrón, por ejemplo. Así en cámaras de niebla de Wilson, tubos de rayos catódicos, etc., nosotros calculamos las trayectorias de los electrones según las leyes de la mecánica clásica. Además tenemos "la confirmación experimental" de que un electrón deja una pista cuando se mueve en el interior de una cámara de niebla.

En mecánica clásica sabemos que el conocimiento de la posición y de la cantidad de movimiento permite determinar el comportamiento dinámico de una partícula. Sus valores pueden "conocerse" con exactitud en cada instante. Sin embargo en Mecánica Cuántica aparece una limitación al conocimiento simultáneo de ambas variables. Limitación intrínseca con la naturaleza ondulatoria del mo-

viniento de la partícula y no con deficiencias en los métodos e instrumentos de medida.

Este principio de incertidumbre nos aleja otra vez de nuestra intuición clásica sobre la posibilidad de la determinación exacta de magnitudes dinámicas. Las coordenadas y la cantidad de movimiento de un electrón no pueden, simultaneamente, tener valores exactos porque el tipo de movimiento es ondulatorio. Ningún progreso técnico podrá permitir la medida de una trayectoria mejor que lo que indica (9.20) ya que, estrictamente hablando, la trayectoria no existe. No se trata de un límite en la medida de estas magnitudes sino de un límite en su propio significado para un estado dado.

El término incertidumbre indica el hecho de que no estamos ante una cuestión de errores accidentales en los aparatos de medida o imperfecciones de los mismos, sino ante una situación en que cantidad de movimiento y coordenadas de una partícula no existen realmente en el mismo estado.

9.11 - Principio de exclusión de Pauli.

En (9.9) dijimos que el estado de una partícula viene descrito por cuatro números cuánticos, es decir por la función de onda asociada mas el spin. Pensemos en un átomo con varios electrones. Cada electrón deberá ser caracterizado por cuatro números cuánticos. El principio de exclusión de Pauli sostiene que, en un sistema multieléctrico, dos electrones no pueden tener el mismo conjunto de números cuánticos. Es decir que a una función de onda que incluya el spin le corresponde un electrón biunívocamente.

Podemos "comprender" este principio pensando que cuatro números cuánticos definen un "sitio" para un electrón. El principio de exclusión evita que puede haber mas de un electrón en cada "sitio".

Este principio fue sostenido por Pauli en 1.925 como una regla empírica pero se encontró mas tarde que era una consecuencia de la forma matemática de la ecuación de Schrödinger.

9.12- Números cuánticos y la tabla periódica.

La resolución de la ecuación de Schrödinger nos dice cuales son las energías permitidas para el sistema de electrones de un átomo. Anteriormente dijimos que la función de onda Ψ describía el estado de una partícula y como venía caracterizado por unos números enteros que llamábamos números cuánticos. El problema de los electrones en un átomo requiere el uso de cuatro números cuánticos para cada estado:

1.- El primer número cuántico, n , puede tomar valores naturales 1, 2, 3, ..., n . Este número fija la energía del electrón y especifica el comportamiento químico.

2.- El segundo número cuántico, l , puede tomar todos los valores $0 \leq l \leq (n - 1)$. Tiene poca influencia sobre la energía del electrón, tiene relación con el momento angular orbital del mismo y describe la penúltima o capa electrónica del átomo. Este número se suele especificar con las letras S, P, D, F, etc. tomadas de la espectrografía.

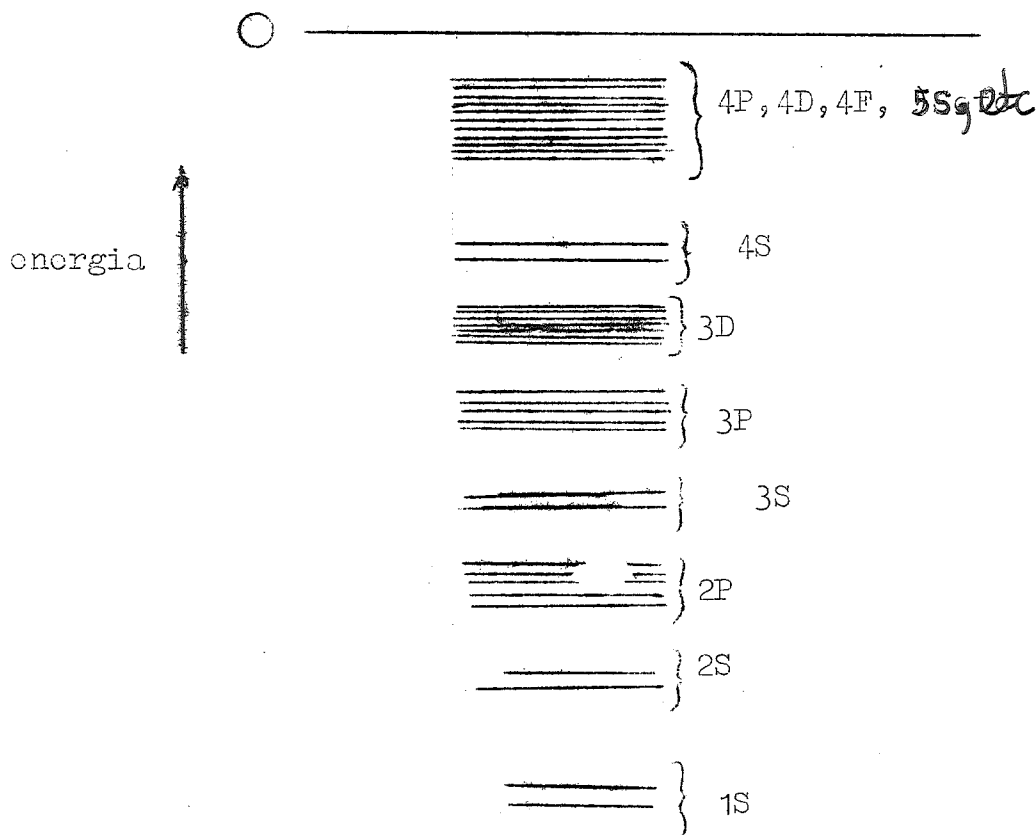
3.- El tercer número cuántico, n , está relacionado con el momento magnético del electrón y puede tomar los valores $-1 \leq n \leq 1$

4.- El cuarto número cuántico, s , describe el movimiento de spin del electrón y sólo puede tomar los valores $\pm 1/2$.

Podemos describir la estructura de los elementos de la tabla periódica por medio de las reglas anteriores. En la figura se ve un diagrama de niveles de energía. Para $n = 1$ tenemos el nivel más bajo y los electrones en esos estados están más ligados al átomo. Cuando n aumenta, los estados están más agrupados y con mayores energías. Como mencionamos antes las propiedades químicas de los átomos quedan determinados por el número de electrones exteriores o de valencia. Las capas exteriores quedan determinadas por el número de estados que corresponde a cada valor de n . Así para $n = 1$ hay dos estados y es la capa K de Química; $n = 2$, hay 8 electrones y es la capa L. La capa M tiene 18 electrones y corresponde a $n = 3$.

Los electrones tenderían a ocupar los estados energéticos más bajos y los niveles se irían llenando ordenadamente. En el hidrógeno un electrón en su estado más bajo, estaría dado por $n = 1$, $l = 0$, $m = 0$, $s = 1/2$. El helio tendría dos electrones $(1, 0, 0, 1/2)$ y $(1, 0, 0, -1/2)$. A veces se utiliza una notación simplificada para describir las capas electrónicas dando los dos primeros números cuánticos y el número de electrones. Así para el H $(1S)^1$, para el He $(1S)^2$, el Li $(1S)^2 (2S)^1$, etc.

Disposiciones relativas de los niveles de energía



Números cuánticos y estados posibles.						
Números cuánticos				Nombre del nivel	Número de estados	
n	l	m	S			
1	0	0	$\pm 1/2$	1S	2	
2	0	0	$\pm 1/2$	2S	2	
2	1	-1	$\pm 1/2$	2P	6	
		0	$\pm 1/2$			
		+1	$\pm 1/2$			
3	0	0	$\pm 1/2$	3S	2	
3	1	-1	$\pm 1/2$	3P	6	
		0	$\pm 1/2$			
		-1	$\pm 1/2$			

Estructura electrónica de los primeros elementos de la Tabla periódica.

Número atómico	Símbolo	Estructura electrónica
1	H	$(1S)^1$
2	He	$(1S)^2$
3	Li	$(1S)^2 (2S)^1$
4	Be	$(1S)^2 (2S)^2$
5	B	$(1S)^2 (2S)^2 (2P)^1$
6	C	$(1S)^2 (2S)^2 (2P)^2$
7	N	$(1S)^2 (2S)^2 (2P)^3$
8	O	$(1S)^2 (2S)^2 (2P)^4$
9	F	$(1S)^2 (2S)^2 (2P)^5$
10	Ne	$(1S)^2 (2S)^2 (2P)^6$

TEMA X. Semiconductores. Estado cristalino. Efecto Hall.

10.1.- Introducción.- Propiedades semiconductoras se han encontrado en ciertos líquidos y compuestos orgánicos. Las características de se niconducción no son una característica exclusiva de los cristales y, reciprocamente, muchos sino la mayoría de las formas cristalinas no son semiconductores. No obstante, todos los semiconductores cuyas propiedades electrónicas están relativamente bien comprendidas son cristalinas y usualmente presentes en cristales simples relativamente grandes. Por esta razón estudiaremos solo el caso de los cristales y aunque este punto de vista puede parecer arbitrario es muy práctico desde un punto de vista de simplicidad.

Nuestra introducción del estado cristalino se limitará se lo a las nociones para la disensión de los semiconductores.

Las características esenciales del estado cristalino son la regularidad en la disposición de los átomos, la pérdida del concepto molécula y su sustitución por la célula unitaria.

10.2.- La geometría interna de los cristales.- En la formación de los sólidos los átomos forman una configuración con la mínima energía posible. Si los átomos en cierta parte han encontrado unas posiciones que parecen los de mínima energía, parece lógico pensar que los átomos en otro lugar tiendan a tomar la misma disposición. Por estas razones tenemos una distribución periódica de átomos en un material sólido.

En otras palabras, la situación en un cristal es la siguiente: Si nos fijamos en un átomo en particular, los que le rodean forman una cierta configuración y si miramos a otro átomo de la misma clase en otro lugar lejano del cristal, encontraremos que la distribución circundante es la misma. Y así encontraremos una periodicidad, una y otra vez, en las tres dimensiones.

Hay dos tipos principales de fuerzas que intervienen en la formación de los sólidos. Uno es la atracción electrostática y el otro es de naturaleza mecánico-cuántica. Como hemos visto, la energía que un electrón puede tener en un átomo está claramente definida y también los están las leyes que le gobiernan. La misma situación se da para moléculas y sólidos.

Los cristales están formados por átomos dispuestos de una manera regular y bien definida que es la red cristalina.

Recordemos que los enlaces entre átomos pueden ser de tipo iónico, covalente o metálico. Bajo el punto de vista tecnológico hay tres elementos interesantes que forman cristales covalentes. Son el carbono, el silicio y el germanio.

En el estudio de los cristales hay tres términos muy inportantes que son:

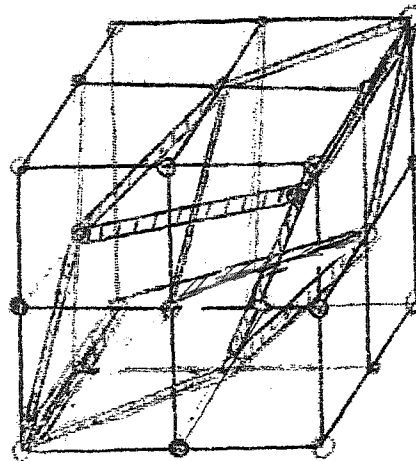
- 1) La célula unidad, que es la porción más pequeña de la red cristalina con la cual se puede desarrollar el cristal por traslaciones simples según tres ejes adecuados (ejes cristalográficos)
- 2) Los ejes cristalográficos, que son las direcciones definidas por las aristas de la célula unidad. Desplazando según ellos la célula elemental se puede generar todo el cristal.

- 3) Las dimensiones de la celdilla unidad o espaciamiento de la red, que son las longitudes de las aristas de la celdilla unidad. Si la celdilla es cúbica, como normalmente ocurre, el espaciamiento de la red también se llama constante de la red.

En el estudio de los semiconductores existen algunos tipos de estructuras cristalinas que son interesantes.

Cúbica simple. - Esta vez contiene átomos en los vértices de un cubo. La mayoría de los compuestos con esta estructura tienen enlace iónico. Como ejemplo está el cloruro de cesio. La celdilla unidad es uno de estos cubos y su densidad de átomos por celdilla unidad es 1.

Cúbica con átomos en los centros de las caras. - La red - consta de cubos con átomos en - cada uno de los vértices y en - cada uno de los centros de las - seis caras. Muchos cristales - iónicos tienen esta estructura. La estructura del cloruro sodico se puede considerar formada por dos estructuras de este tipo - que se han entrelazado y tienen, en cada red iones de un solo tipo. Algunos metales también tienen esta estructura.



La célula unidad en esta estructura no es evidente y es el paralelepípedo indicado - con brazos anchos en la figura.

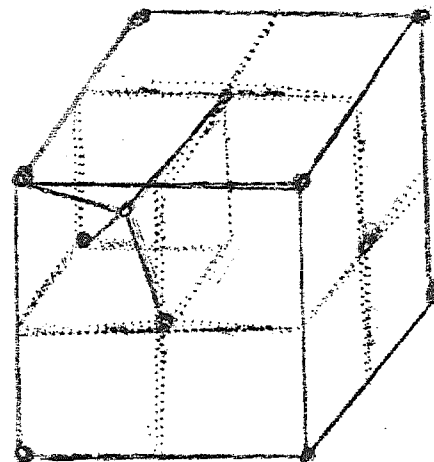
Cúbica con átomo en el centro del cubo. - Es simplemente un conjunto de cubos simples con un átomo adicional en su centro. Algunos metales tienen esta estructura, pero no se conoce ningún semiconductor importante con ella.

Tetraédrica del diamante. - Bajo el punto de vista de la ingeniería de semiconductores es la más importante, pues el G_c y el Si

la poseen. Como indica la figura la estructura que crea mediante cubos que tienen 8 átomos en sus vértices, 6 átomos en los centros de sus caras y 4 átomos interiores. Cada átomo interior dista $d/4$ de las caras del cubo y forma con los cuatro que le rodean un tetraedro regular. Cada átomo de los vértices del cubo está compartido por ocho cubos y los del centro de las caras lo están por dos, con lo cual cada cubo contiene en neto:

$$8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} + 4 = 8 \text{ átomos}$$

Entonces si d es la arista del - cubo la densidad atómica del - cristal es $8/d^3$.



- 47 -

Para el Si $a = 5,43 \cdot 10^{-8}$ cm. , la densidad es $4,96 \cdot 10^{22}$ aton/cm³

" " Ge $a = 5,66 \cdot 10^{-8}$ cm. , " " " $4,44 \cdot 10^{22}$ aton/cm³

La distancia entre dos átomos vecinos en esta estructura será:

$$\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} =$$

$$= a \sqrt{\frac{3}{16}} = a \frac{\sqrt{3}}{4}$$

la célula unitaria para esta estructura del diamante es la misma que para la estructura anterior.

Así cada átomo está enlazado con sus cuatro vecinos por enlace covalente, compartiendo con ellos los ocho electrones. Notemos que las aristas de la célula unidad no quedan paralelas a los enlaces entre átomos. La definición de la célula unitaria es de naturaleza geométrica más bien que función de la disposición de los enlaces. Seguidamente vemos las posiciones de los átomos en una malla de diamante proyectado sobre una cara del cubo; las fracciones denotan la altura por encima de la base formando como unidad la arista del cubo.

Por último digamos que el enlace metálico resulta de compartir gran número de electrones entre todos los átomos. La situación quedará reflejada en preguntas posteriores. El enlace resulta porque la energía total es menor cuando el cristal está formado que cuando los átomos están separados. Los electrones en un cristal metálico pueden moverse tan libremente de un átomo a otro que son solo las paredes del sólido los que tienden a contenerlos. Por esta razón, se habla a veces de la existencia de un gas electrónico en el interior de los metales. La tendencia a formar sólidos con enlace metálico es mayor para los elementos de valencia baja y de aquí que la parte izquierda de la tabla periódica tienda a contener a los metales.

10.3- Índices de Miller.

La posición y orientación de un plano cristalino se determina mediante las coordenadas de tres átomos de este plano no situados en la misma recta, si estos átomos pertenecen cada uno a un eje cristalográfico, el plano puede especificarse por las posiciones de los átomos a lo largo de los ejes en función de las constantes de la red. Si, por ejemplo, los átomos que determinan el plano poseen las coordenadas (4, 0, 0) ; (0, 1, 0) ; (0, 0, 2) relativas a vectores axiales del mismo origen, el plano puede designarse por los tres números 4, 1, 2.

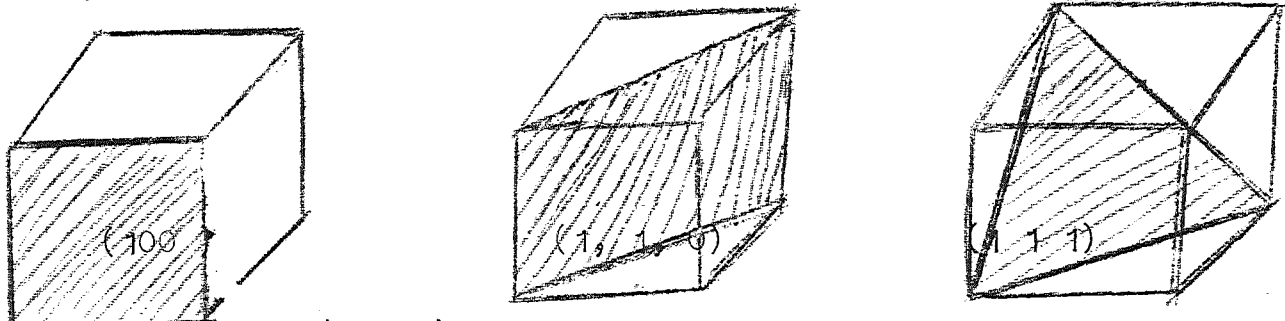
Resulta mas útil especificar la orientación de un plano mediante los índices de Miller obtenidos del modo siguiente:

1) Se determinan las intersecciones sobre los tres ejes básicos de la red en función de las constantes de la red.

2) Se toman los valores recíprocos de estos números y se reducen a los tres enteros mas pequeños proporcionales a estos in--

versos. El resultado se indica dentro de un paréntesis: $(h \ k \ l)$.

Así, en el plano cuyas coordenadas son 4, 1, 2, los recíprocos son $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$ y los índices de Miller $(1 \ 4 \ 2)$. Si la intersección se realiza en el infinito (plano paralelo a uno de los ejes) el índice correspondiente es cero. En la figura se muestran los índices de Miller de algunos planos importantes en un cristal cúbico.



Los índices $(h \ k \ l)$ designan un plano simple o una serie de planos paralelos. Si un plano corta a un eje en la parte negativa respecto al origen, el índice correspondiente es negativo y se indica mediante un signo menos situado sobre el índice $(h \ \bar{k} \ l)$. Las caras de un cristal cúbico son $(1 \ 0 \ 0)$, $(0 \ 1 \ 0)$, $(0 \ 0 \ 1)$, $(\bar{1} \ 0 \ 0)$, $(0 \ \bar{1} \ 0)$ y $(0 \ 0 \ \bar{1})$.

Las posiciones de los puntos en una malla se definen por sus coordenadas en el sistema de referencia formado por los ejes, a, b y c de la red. Cada una de estas coordenadas se expresa por una fracción de la longitud del eje a, b ó c y el origen en uno de los nudos de la malla. Así, las coordenadas del punto central de una malla son $\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}$ y las de los centros de las caras $\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ 0$; $0 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2}$.

Una dirección determinada en un cristal se define por la serie de los tres enteros mas pequeños proporcionales a los componentes de un vector en la dirección deseada referida a los vectores axiales. Estos números se escriben entre paréntesis cuadrados [n v w]. El eje x posee así la dirección $1 \ 0 \ 0$ y el eje - y la dirección $0 \ \bar{1} \ 0$.

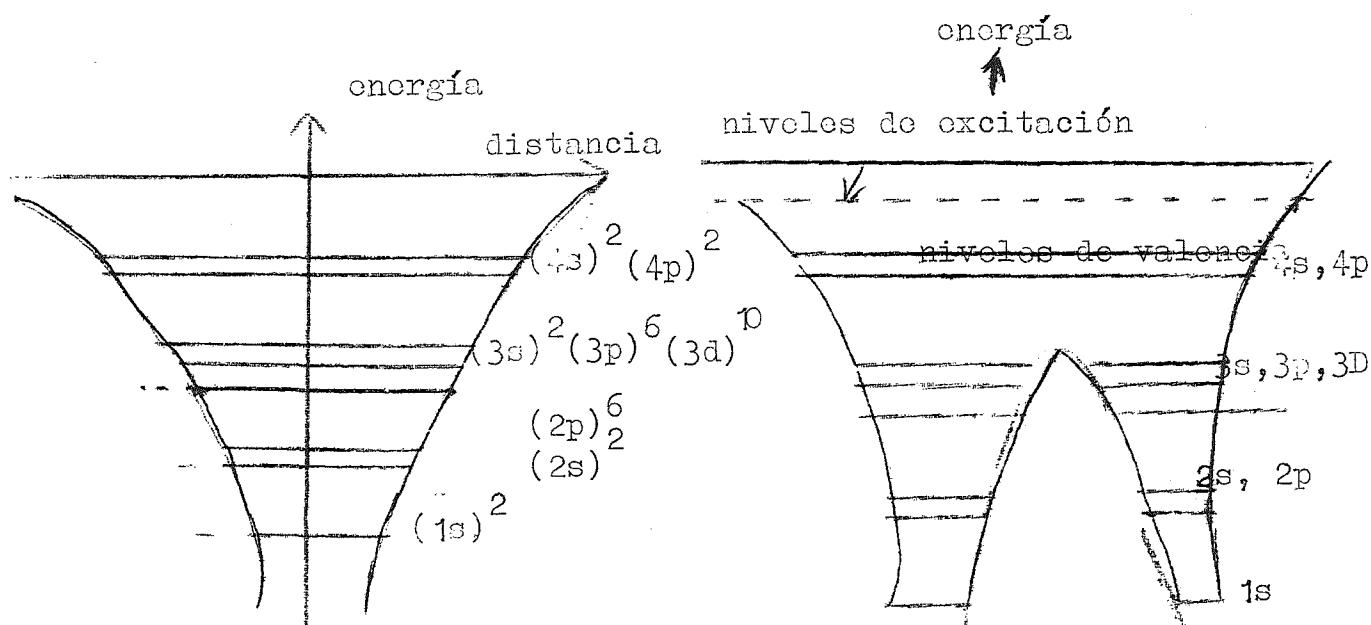
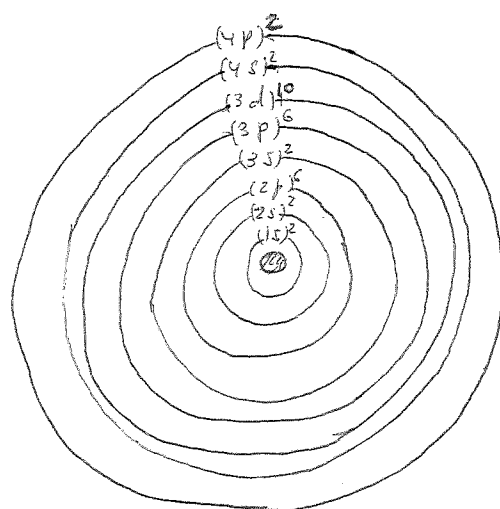
10.4- Bandas de energía en un sólido.

Hemos visto anteriormente cómo los estados energéticos de los electrones en un átomo forman un espectro discreto. Cuando los átomos se reúnen para formar un sólido, por cumplirse el principio de exclusión de Pauli, tendremos una multitud de estados dado el gran número de átomos en un sólido. Estos estados forman bandas "casi continuas" de energía que los electrones pueden ocupar. Como el movimiento de los electrones en el sólido es controlado por los estados de energía que pueden ocupar, la naturaleza exacta de estas bandas de energía es de importancia vital para la determinación de las propiedades eléctricas del sólido.

Por esta razón se utilizan los diagramas de energía en los que se puede situar cada electrón según su estado energético. En este diagrama los electrones tenderán a ocupar las energías menores, es decir las partes bajas de la escala. Intentemos intuir la formación de este diagrama.

En la figura tenemos una representación esquemática de un átomo y de sus niveles de energía. Las capas K, L y M están completas y los niveles 4S y 4P tienen un total de cuatro electrones. El elemento tiene de número atómico 32 y es el germanio. La distancia

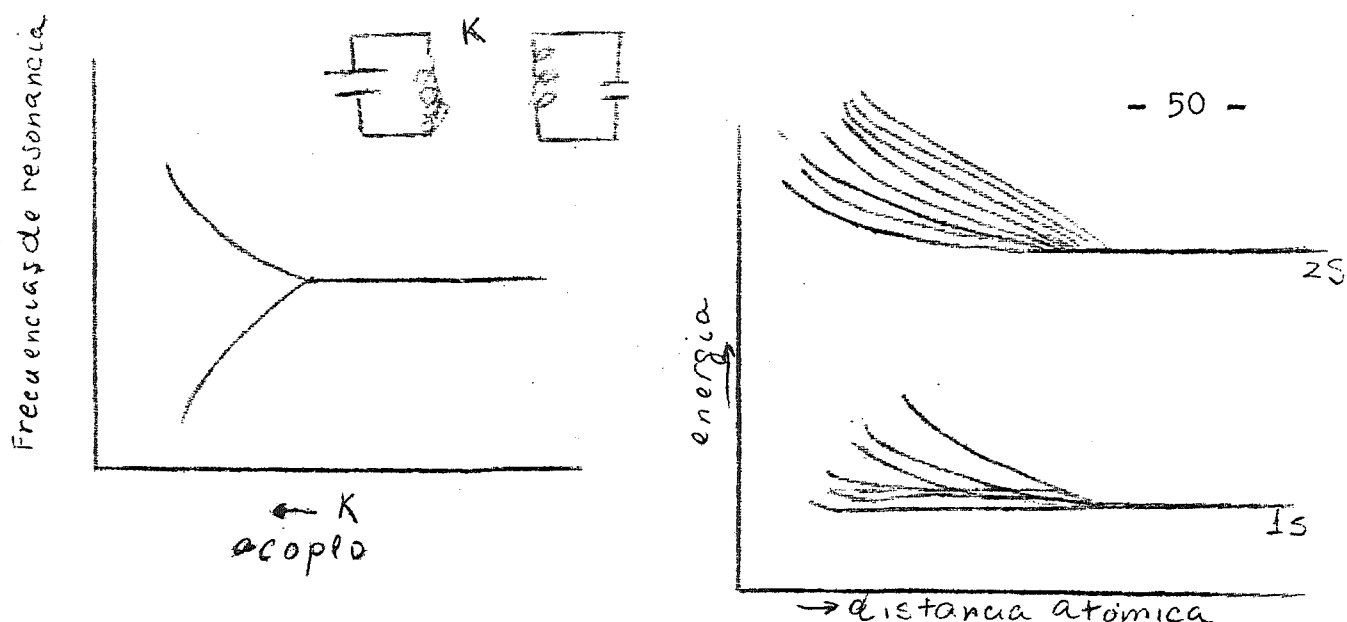
entre un nivel de energía y el cero de potencial indica la profundidad del nivel. Las distancias no están a escala.



Cuando los átomos se agrupan para formar un sólido están tan próximos que las fuerzas que gobiernan un átomo influyen sobre los vecinos. Los niveles de energía de cada átomo sufren unas ramificaciones o desdoblamientos. Así para el caso de dos átomos idénticos y próximos, habrá una duplicidad de niveles como indica la figura. El número de estados posibles por átomo no varía, pero los estados de cada átomo sufren un ligero desplazamiento.

El fenómeno de la ramificación de los niveles de energía es muy parecido con lo que ocurre cuando dos circuitos resonantes se acoplan fuertemente. Si el acople es superior al crítico aparece la resuesta con dos picos. Así, la magnitud de la dispersión entre niveles depende de la proximidad de los átomos entre si para formar el sólidos, es decir, de la fortaleza del acople entre los niveles de energía. Cuando los átomos están mas proximos la dispersión aumenta.

Lo que antes constituían los niveles $1s$, $2s$, $2p$ etc. de cada átomo, forman ahora grupos de niveles que se llaman bandas ya que en un sólido real hay tal cantidad de átomos que el espaciamiento entre niveles es tan fino que no puede detectarse experimentalmente



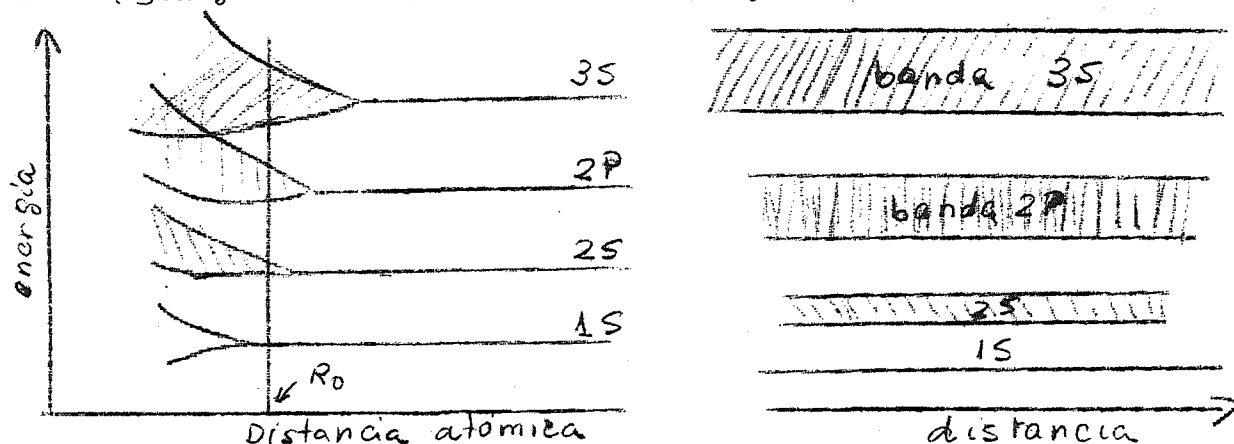
En particular los niveles de valencia de los átomos dan lugar a la denominada banda de valencia. Esta banda y las que están por encima de ella son compartidas por el cristal como un todo. El salto de energía directamente por encima de la banda de valencia es la banda de energía prohibida ya que no pueden existir electrones en el cristal con esa energía. La banda de energías permitidas por encima de la banda prohibida se llama la banda de conducción.

Esta banda corresponde a los primeros estados excitados y está normalmente vacía.

Las bandas interiores, o bandas mas inferiores, no están compartidas por todos los átomos. Ellas no son importantes en la determinación de las propiedades eléctricas del sólido.

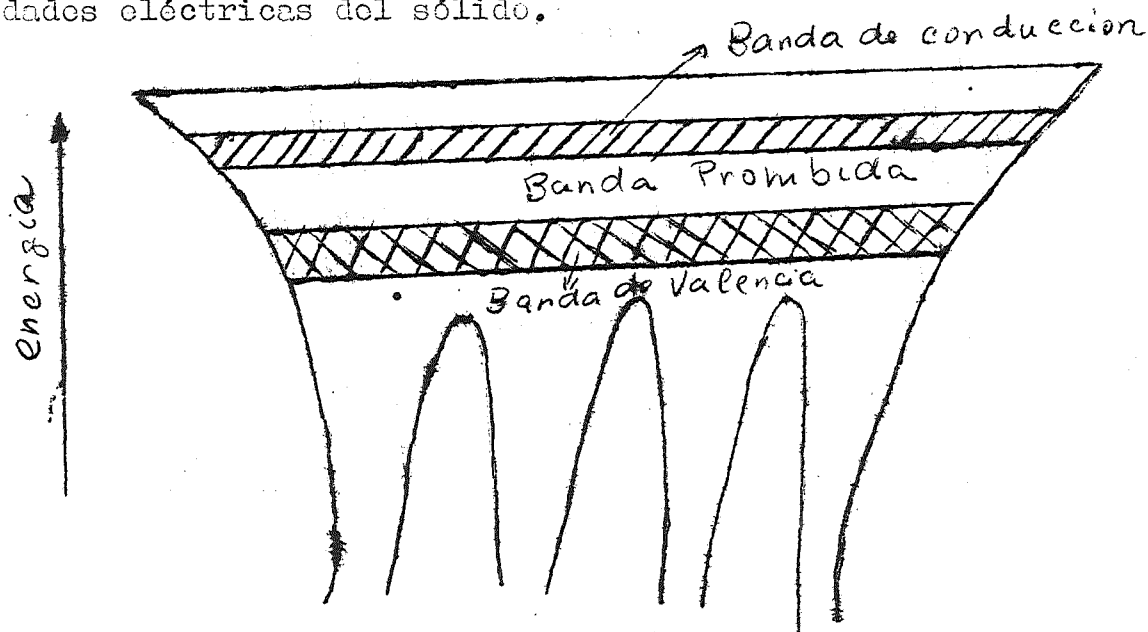
Al igual que son los electrones de valencia los que determinan las propiedades químicas de los átomos, es la banda de valencia y las inmediatas superiores las que determinan las propiedades eléctricas del sólido.

En la figura siguiente se quiere visualizar la conexión entre la energía y la distancia interatómica.



Supongamos que pudiésemos calcular el espaciamiento entre niveles en función de la distancia inter atómica. Los niveles superiores, los mas externos en los átomos, sufren la dispersión primero. - Esto era de esperar pensando que son los primeros que se ven influenciados por los átomos vecinos y los mas internos sólo serán afectados en el caso de gran proximidad entre átomos. Habrá una cierta distancia entre átomos para la cual el cristal es estable (R_0) y para ella tendremos el diagrama de bandas situado a la derecha. Veremos como el número de electrones que pueden albergar las bandas y el número -

de ellos que contengan las bandas exteriores determinan las propiedades eléctricas del sólido.



10.5- La conducción eléctrica en los sólidos.

Bajo el punto de vista de la conducción eléctrica, los sólidos han sido clasificados, un poco arbitrariamente, en tres grupos: conductores, aislantes y semiconductores. Pero esta clasificación es una cuestión de magnitud, de cantidad, mas que de concepto.

Se ha dicho que la conductividad o resistividad es la magnitud física cuyo margen de valores es mas grande en la naturaleza. Los denominados conductores presentan resistividades inferiores a

$10^{-2} \Omega \cdot \text{cm.}$ A los semiconductores se les asigna un margen entre 10^{-2} y $10^6 \Omega \cdot \text{cm.}$ y los aislantes tienen resistividades hasta de $10^{20} \Omega \cdot \text{cm.}$ como ocurre en el cuarzo.

Así, en una primera definición de semiconductor es aquella sustancia que queda entre los conductores y aisladores, con resistividad del orden de 10^{-2} a $10^2 \Omega \cdot \text{cm.}$ La constante dieléctrica relativa está normalmente comprendida entre 5 y 50.

Una situación común para los tres grupos es que las propiedades eléctricas están muy afectadas por la pureza y tratamiento de la muestra en estudio. Esto es especialmente cierto para los semiconductores donde veremos como pequeñas cantidades de impurezas pueden servir para controlar las propiedades eléctricas en un ancho margen.

La variación de la resistencia con la temperatura señala notables diferencias entre los tres grupos. En los metales la resistividad aumenta con la temperatura. En los aislantes disminuye con la temperatura, y en los semiconductores el coeficiente de variación puede ser positivo o negativo, puede ser completamente no lineal y puede ser muy grande. Veremos mas tarde como los portadores de carga en un aislante son pocos, en un metal son muchísimos y poco dependientes de T y en un semiconductor es un número variable con T y fácilmente controlable.

La historia de los semiconductores empieza en 1.833 en que Faraday encontró un coeficiente negativo en la variación de la resistencia con la temperatura del sulfuro de plata. En 1.873 se en-

contraron sustancias con propiedades rectificadoras.

10.6- Conexión entre las bandas de energía y la conducción eléctrica.

En un sólido la corriente eléctrica se produce cuando se tiene una gran cantidad de electrones libres para moverse cuando se les aplica un campo eléctrico exterior. Los factores que entrarán en la determinación de la conductividad serán la densidad de electrones libres y la facilidad con que pueden desplazarse. Es relativamente fácil el determinar el número de electrones en las distintas bandas de un sólido. Simplemente habrá que ir colocando los electrones que tenemos de manera que vayan llenando las bandas desde los estados mas bajos hacia las bandas mas superiores.

Si no tenemos en cuenta ningún efecto producido por la temperatura, los estados electrónicos se encontraran ocupados hasta un cierto nivel por encima del cual las bandas están vacías. Recordemos como las bandas inferiores son las mas profundas en la estructura atómica, las más ligadas al núcleo y sus electrones no será fácil que se puedan mover. Estas bandas no contribuyen al proceso de conducción en ningún caso y sólo son las bandas exteriores las que controlan dicho proceso.

Podíamos preguntarnos por los movimientos posibles que pueden tener los electrones en las bandas superiores llenas o parcialmente llenas. La contestación es la siguiente:

a) Una banda totalmente ocupada no puede contribuir a la conducción electrónica porque sus electrones no son libres de moverse de una manera neta en ninguna dirección. En el supuesto de un desplazamiento de electrones en el interior de la banda, es necesario que si un electrón pasa de un nivel i a uno j el electrón de j pase a i , con lo que la conducción neta es nula.

b) Una banda parcialmente llena contribuirá a la conducción electrónica.

c) Una banda vacía evidentemente no puede contribuir a la conducción por no contener ninguna carga.

Los razonamientos para justificar las afirmaciones anteriores son muy complejos y requirieron un estudio cuántico de los sólidos. Bajo un punto de vista cualitativo vamos a describir alguno de estos procesos.

Una banda parcialmente llena puede tener unos cuantos electrones solamente o estar la mitad llena. En este último caso habrá una gran contribución a la conductividad del sólido porque habrá un gran número de electrones y serán relativamente libres de moverse de un estado a otro de la banda.

En los casos de una banda casi vacía, es decir en que existen unos cuantos electrones en los estados mas bajos de la banda y en el caso inverso de una banda casi llena en que sólo hay algunos estados vacíos en la parte superior de la banda, el tratamiento ha de ser mas detenido y se verá en las dos preguntas siguientes.

Queda por último la posibilidad de que un electrón tenga suficiente energía como para pasar de una banda llena a otra vacía saltando la banda prohibida. Esta cuestión será tratada también posteriormente.

10.7- Conducción electrónica en un sólido.- Clásicamente los fenómenos de conducción eléctrica se deben a los movimientos de iones y electrones. En los sólidos la conducción es enteramente electrónica, aunque el comportamiento de estos electrones sea muy diferente en el interior del sólido que en estado libre.

Hay que señalar en primer lugar que el sólido tiene una estructura, un conjunto de núcleos positivos, gran cantidad de electrones relativamente próximos, que imponen ciertas características al movimiento del electrón. En el caso de un electrón libre, cuando se aplicaban unos campos exteriores estos eran los que gobernaban la dinámica del electrón. Sin embargo en el caso de un sólido, debido a la interacción entre la estructura del sólido y los electrones, al aplicar un campo externo no es solamente éste quien gobierna al electrón. Los electrones en el interior de un sólido se encuentran sometidos siempre a los potenciales que crean los núcleos de los átomos del cristal y a las influencias de unos electrones sobre otros. Al aplicar un campo exterior, éstas son las interiores al cristal serán las que en realidad actúan sobre el cristal.

El estudio de estas cuestiones vuelve a ser exclusivamente cuántico. Afortunadamente, se ha encontrado que las influencias de la estructura periódica del cristal sobre un electrón se pueden tener en cuenta y englobar si en la dinámica del electrón se sustituye su masa por una cantidad llamada masa efectiva. Con esta sustitución, si se aplica una fuerza F exterior al cristal, el electrón en el sólido responde a la 2ª ley de Newton como si estuviese libre

$$\vec{F}_{\text{ext}} = m_{\text{ef}} \vec{a} = m^* \vec{a} \quad (10.1)$$

La utilización de la masa efectiva permite, a la vez, tener en cuenta los efectos de los potenciales internos del cristal y poder utilizar las fórmulas de la dinámica del electrón libre.

La masa efectiva de un electrón depende del nivel en que se encuentre dentro de la banda de energía.

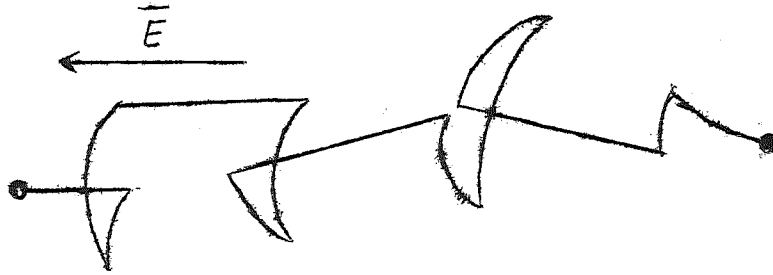
Estudiamos primero la situación en una banda casi vacía. Tendremos únicamente algunos electrones ocupando los estados inferiores de la banda. Por otra parte esta banda será la banda de valencia que sabemos es compartida por todos los electrones del cristal.

Estos electrones de la parte inferior tienen una masa efectiva que es muy próxima a la masa real del electrón, lo cual indica que podemos considerarlos como electrones libres. A aplicar un campo eléctrico están sometidos a una fuerza.

$$\vec{F} = -e \vec{E} = m_{\text{ef}} \vec{a} = m \vec{a} \quad (10.2)$$

dando lugar a un movimiento uniformemente acelerado. Sin embargo el electrón en su trayectoria choca con los átomos, con otros electrones, con las imperfecciones cristalinas, las vibraciones térmicas de la red cristalina lo alteran y todo ello da lugar a un movimiento errático pero tendente a moverse según manifiesta el campo. El valor medio de los tiempos entre choques sucesivos

se llama el tiempo libre medio y la media de las longitudes recorridas entre dos choques se llama el camino libre medio.



En el movimiento de zig-zag resultante, las trayectorias - pueden no ser rectilíneas pues se trata de movimiento uniformemente acelerado.

Si el electrón fuese libre su movimiento sería uniformemente acelerado con una aceleración proporcional al campo \vec{E} aplicado como indica (10.2). En nuestro caso del electrón en el sólido, el tiempo de movimiento sólo nos permite hablar de velocidad media entre dos puntos y pensar que dicha velocidad es función del campo eléctrico aplicado, \vec{E} . A la constante de proporcionalidad se la denomina la movilidad del electrón, es decir

$$\langle v \rangle = \mu_e E \quad (10.3)$$

Esta movilidad será función del tiempo libre y del camino libre medios.

Bajo el punto de vista eléctrico, la densidad de corriente J será

$$J = \sigma_e E \quad (10.4)$$

Por otra parte, si n es el número de electrones por unidad de volumen la densidad de corriente que proporcionan será

$$J = e n \langle v \rangle = e n \mu_e E \quad (10.5)$$

luego la conductividad debida a estos electrones es

$$\sigma_e = e n \mu_e \quad (10.6)$$

El resultado anterior es correcto en cuando el número de electrones en la banda es pequeño con respecto al número de estados posibles.

Es obvio además que el desplazamiento de los electrones es de sentido opuesto al campo aplicado.

10.8- Conducción por huecos.- Según la imagen anterior parece que, a primera vista, la conductividad debe aumentar conforme el número de electrones en la banda aumenta. Sin embargo sabemos que cuando la banda está completa la conducción es nula. Este dilema solo puede ser solucionado por un estudio profundo de estos fenómenos de conducción y nosotros sólo vamos a dar los resultados.

a) El comportamiento de los electrones en la parte superior de una banda es radicalmente distinto al de los electrones de los niveles inferiores.

b) La masa efectiva de un electrón situado en la parte superior de una banda es negativa. Este resultado no tiene ninguna analogía clásica.

c) En una banda con M estados posibles que contiene n electrones (n comparable con M) el número neto de electrones que transportan corriente eléctrica es

$$M - n$$

d) Los electrones anteriores, $M - n$, tienen la propiedad señalada en b) de una masa efectiva negativa.

e) Bajo el punto de vista de la dinámica un electrón de carga negativa y masa efectiva negativa se comporta como si fuese una partícula de masa efectiva positiva y carga positiva. A estas partículas se les llama huecos.

Hay que insistir que el concepto de hueco es entonces, únicamente, una manera de llamar o simbolizar el comportamiento extraño y difícil de los electrones en una banda casi completa.

En resumen, la contribución a la conducción eléctrica de una banda casi completa se realiza por unos portadores llamados huecos de carga e , masa efectiva m_h^* y cuyo número es igual, al de los estados vacíos de la banda. La corriente producida por ellos será

$$J_h = e v_h E \quad (10.7)$$

siendo

$$J_h = e p \langle v_h \rangle = e p \mu_h E$$

en donde p es el número de huecos por unidad de volumen y μ_h la movilidad de los huecos.

En la situación en que un sólido tenga una banda casi vacía y otra casi llena, la conductividad total será la debida a los electrones mas la debida a los huecos

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_h = n e \mu_e + p e \mu_h \quad (10.8)$$

10.9- Estructura de bandas de energía en los aislantes, conductores y semiconductores.

Examinemos la situación en equilibrio térmico y a temperatura ambiente. La inclusión de los efectos de la temperatura nos lleva a considerar una cierta energía térmica en los electrones que tendrá influencia en su distribución en las bandas, como mas tarde veremos.

Un aislante se caracteriza por una banda de valencia totalmente ocupada separada por una ancha zona prohibida (unos 10 e V) de la banda superior o de conducción que está vacía. Esta situación se puede producir bien por estar ocupados los niveles de valencia en los átomos y dar lugar a una banda completa o bien por un proceso de solapamiento y posterior separación de las bandas. La primera estructura es típica de los cristales iónicos. En la segunda las bandas de valencia y conducción primitivas se solapan y luego se separan en dos nuevas bandas, de manera que la nueva de valencia contine únicamente los estados ocupados y la nueva de conducción todos los vacíos. Este fenómeno de cambiar la estructura de las bandas es típica de los cristales covalentes de los elementos del grupo IV por lo que también lo tienen el germanio y el silicio.

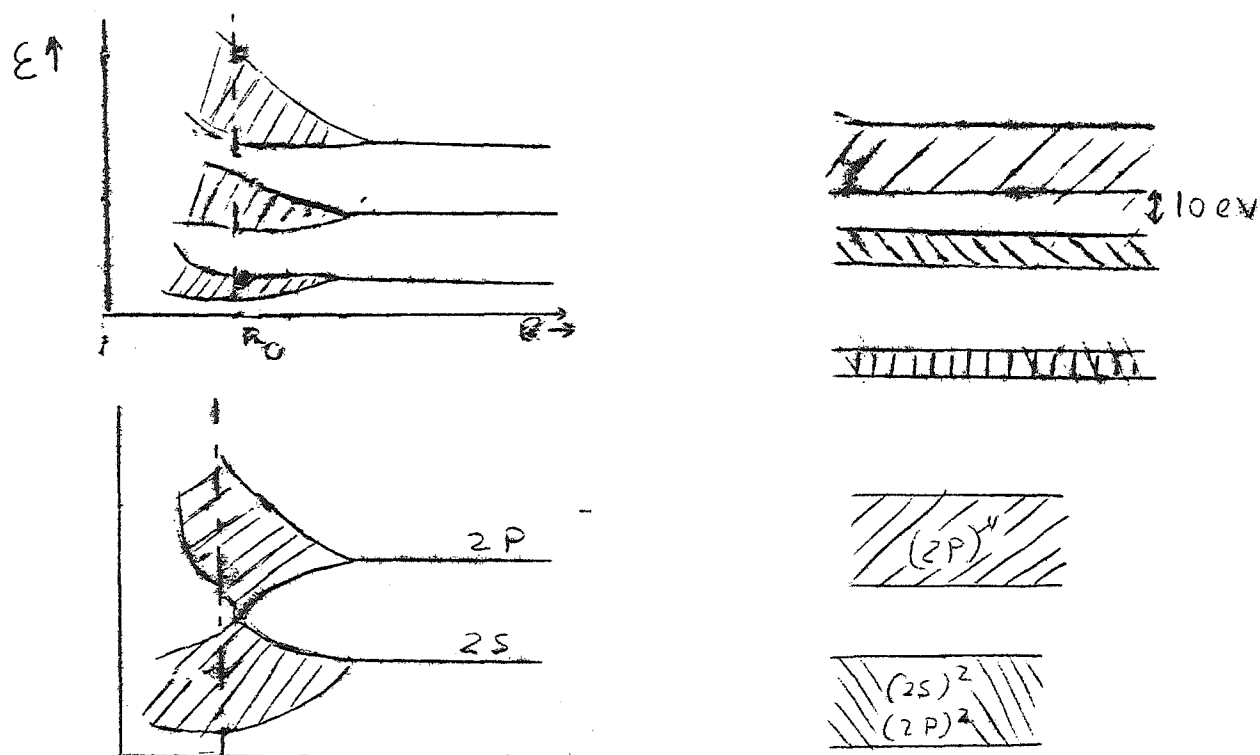


Fig. estructura de cristales aislantes iónicos y covalentes.

En los semiconductores se produce también un cruce de bandas pero la distancia atómica estable está muy próxima a este punto de cruce por lo que el salto de energía prohibida es muy pequeño. Así podemos considerar al Si como un aislante con una banda prohibida muy estrecha (1.1 e V en Si y 0.7 en Ge).

Estos cristales se consideran como semiconductores porque a la temperatura ambiente la energía térmica de los electrones es suficiente para que algunos salten la banda prohibida produciendo una concentración de electrones en la banda de conducción y de

huecos en la de valencia capaces de producir una conductividad - apreciable. La resistividad del Si a la temperatura ambiente es de 3×10^5 en y la del Ge de 60 ohm x cm.

En los aislantes la banda prohibida era tan ancha que no podía ser atravesada por los electrones térmicos. Sólo cuando apliquemos campos eléctricos muy intensos es posible que los electrones puedan pasar a la banda de conducción, inicialmente vacía, dando lugar a una conducción. Este proceso se llama ruptura o perforación del dieléctrico.

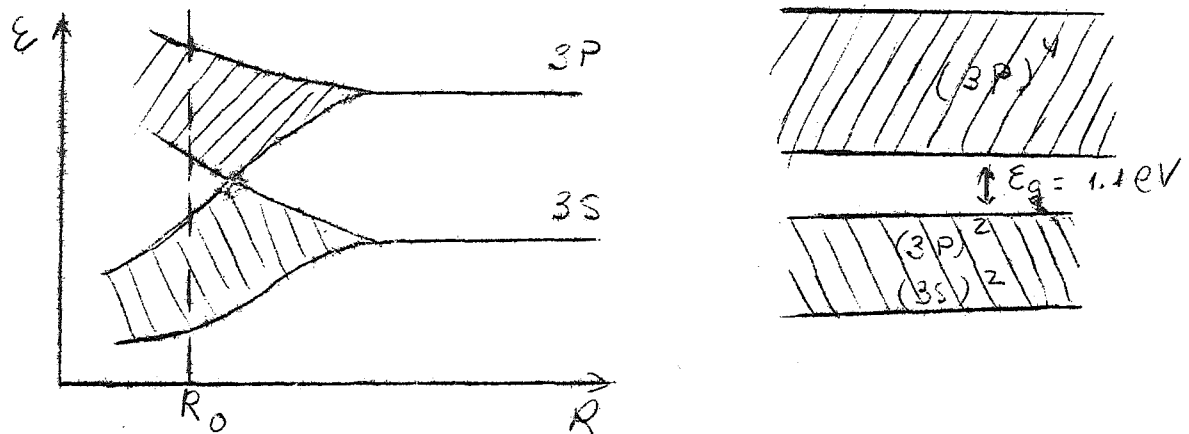


Fig. Estructura de bandas de semiconductores.

En los metales el fenómeno de solapamiento de las bandas se acentúa. A la distancia atómica de equilibrio las bandas primitivas; unas llenas, otras semillenas y otras vacías, se han unido dando, por tanto, una banda resultante con gran cantidad de electrones y gran cantidad de estados libres. Esta situación permite una conducción eléctrica muy buena. En general para poder decidir sobre la naturaleza eléctrica de un sólido hay que hacer un estudio detallado de sus bandas de energía y del solapamiento de las mismas.

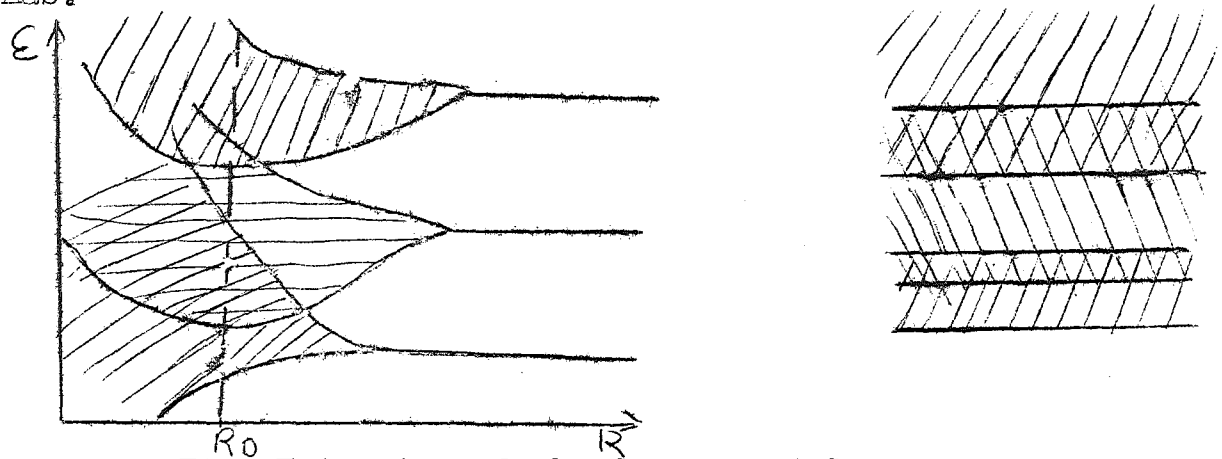


Fig. Estructura de bandas en metales.

- 10.10- Distribución de estados permitidos. Función densidad de distribución. - La siguiente cuestión a estudiar es la estructura de las bandas de energía. Poder determinar los niveles o estados posibles que los electrones pueden ocupar en una banda. Tal estudio hay que realizarlo por mecánica cuántica y nosotros sólo daremos el resultado.

Cada banda contiene un número finito de niveles. Está cuantificada. Como es usual en estadística, para describir el comportamiento de una colectividad numerosa hay que utilizar métodos estadísticos. Así - la función densidad de distribución nos dice cuántos estados cuánticos hay tales que sus energías estén comprendidas entre \mathcal{E} y $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$ por unidad de volumen del cristal. Como es lógico, tal función densidad de distribución es nula en los intervalos prohibidos de energía y por integración en cada banda permitida dará los estados permitidos o posibles que existen en esa banda.

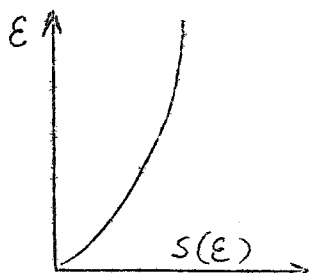
Otro problema, que trataremos posteriormente será el efecto de la temperatura sobre como se distribuyen los electrones que tengamos para ocupar los niveles posibles en cada banda.

Vamos pues primero a indicar la distribución de los estados en las bandas. Tal distribución de estados no es uniforme y así si llamamos dS el número de estados cuánticos por unidad de volumen cuyas energías quedan en el intervalo \mathcal{E} y $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$, definimos la función densidad de distribución de estados por

$S(\mathcal{E}) = dS/d\mathcal{E}$ (10.9); es decir $dS = S(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$ es decir $s(\mathcal{E})$ es el número de estados cuánticos por unidad de energía y por unidad de volumen en el cristal.

Se demuestra que $s(\mathcal{E})$ es la forma

$$S(\mathcal{E}) = A \mathcal{E}^{\frac{1}{2}} \quad (10.10)$$



Tal función es claramente no uniforme e indica una mayor concentración de estados cuánticos para energías altas.

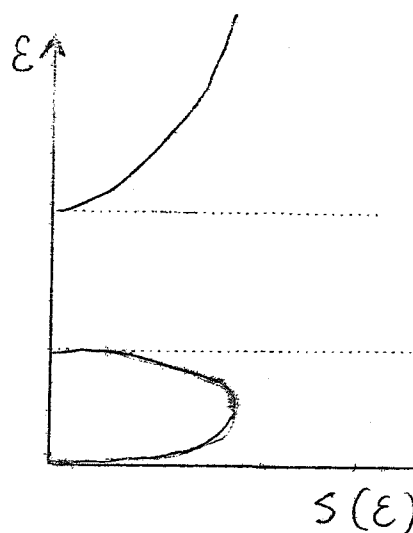
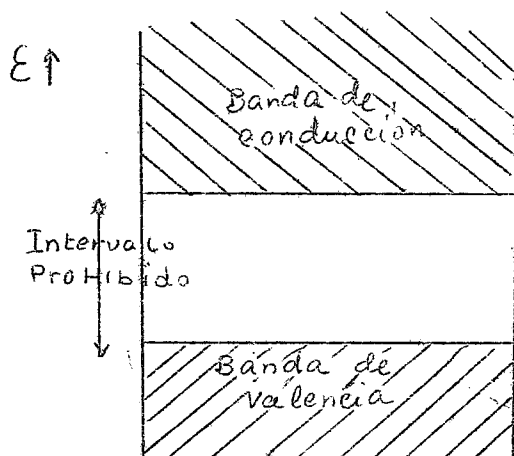
Como aplicación, pensemos en el número total de estados cuánticos que existen en un cristal de volumen unidad y cuyas energías estén comprendidas entre \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 . Será

$$N = \int_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2} S(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$$

En general para un cristal de volumen determinado el cálculo del número de estados requiere una integración según las energías y según el volumen

$$\int_{\mathcal{E}} \int_V S(\mathcal{E}) d\mathcal{E} dv$$

En la figura se muestra la densidad de estados posibles en las bandas de valencia y conducción en un semiconductor.



10.11- Efecto de la temperatura. Funciones de distribución de Maxwell-Boltzmann y Fermi-Dirac.

Ya sabemos cuántos estados cuánticos tiene un semiconductor. Los electrones que él mismo posea deben proceder a ir ocupando dichos estados según una cierta ley. Si pudiésemos aislar nuestro sólido del universo, sin tener en cuenta que el resto del universo ejerce alguna clase de influencia sobre él, no tendríamos en cuenta las ideas de calor y temperatura. Los electrones ocuparían los niveles de energía mínima.

Supongamos ahora nuestro sistema a una temperatura T y en equilibrio térmico. El equilibrio térmico está caracterizado por

- una temperatura de $T^{\circ} K$
- una situación estacionaria en que no se puede detectar ninguna tendencia como función del tiempo.
- la situación actual no presenta indicios de la historia pasada del sistema.
- el sistema está difuso y desordenado al máximo.
- cualquier perturbación inicial del sistema ha tenido tiempo de relajarse completamente.

El número de electrones para ocupar los niveles será muy grande y sólo podemos describir un comportamiento estadístico, un comportamiento en media. La media a que nos referimos anteriormente puede entenderse de dos maneras diferentes que en la mayoría de los problemas físicos pueden tratarse como completamente equivalentes. Una manera supone que observamos un sistema dado durante un largo tiempo y en particular observamos el comportamiento dinámico que nos interese. La media en el tiempo de la función numérica de ese comportamiento es el comportamiento medio. Alternativamente podemos considerar una gran cantidad de sistemas cuyas propiedades sean idénticas a las de nuestro sistema dado. Entonces, en un momento arbitrario medimos un cierto comportamiento dinámico en cada sistema. La media aritmética del conjunto de estos números es la media deseada.

Al estudiar cómo ocupan los niveles de electrones hay que hacer ciertas hipótesis sobre cómo se estudia el problema y la interacción de las partículas.

Las llamadas distribuciones clásicas utilizan la mecánica clásica. Son válidas para el estudio de sistemas rarificados, es decir aquellos sistemas en que el número de partículas es mucho menor que el número de estados disponibles. Tal es la llamada función de distribución de Maxwell-Boltzmann.

Las distribuciones cuánticas se aplican a sistemas discretos en donde hay que aplicar el principio de exclusión de Pauli. Describen los denominados sistemas densos en que el número de partículas y de estados son comparables. Tal es la situación de los electrones en un sólido que hay que describir por medio de la función de Fermi-Dirac.

Ambos tipos de distribuciones se conocen también como "estadísticas" y así se habla de estadística de MB y de FD.

Para nuestro estudio de semiconductores tenemos que aplicar la distribución de FD.

La función de distribución de Fermi nos da la probabilidad de que un cierto nivel de energía ϵ esté ocupado por un electrón.

Tal función de FD dependerá de la estructura íntima del sólido y de la temperatura.

Ambas leyes de distribución se determinan calculando el número de formas en que nuestras partículas pueden ocupar los niveles disponibles y suponiendo que la disposición mas probable es la que realmente se observa y se produce.

La función de MB es

$$f_{MB}(\epsilon) = A \exp\left(-\frac{\epsilon}{kT}\right) \quad (10.11)$$

donde

A es una densidad de referencia función del número total de partículas y de la temperatura.

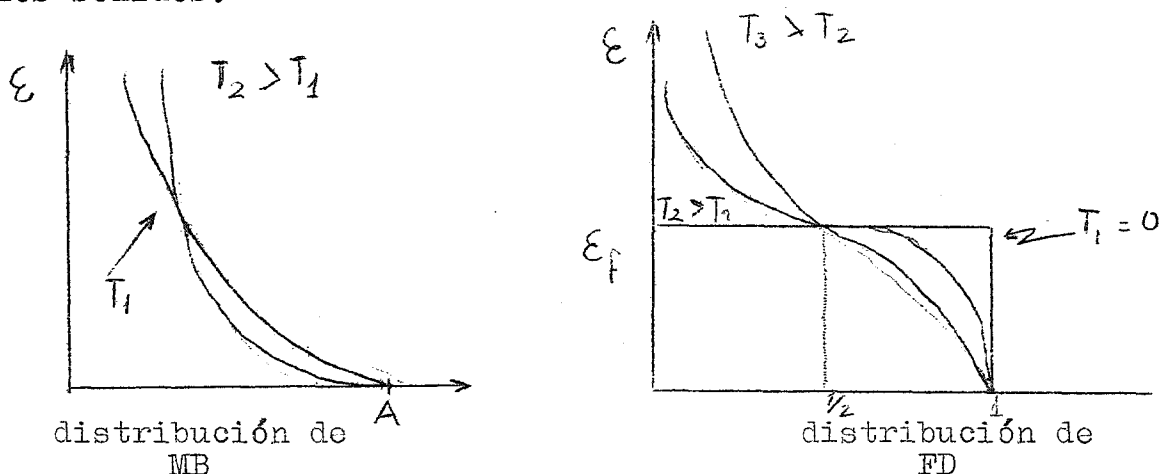
k es la constante de Boltzmann.

Como vemos tal distribución es independiente de la distribución de los estados disponibles.

La función de FD es

$$f_{FD}(\epsilon) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\epsilon - \epsilon_f}{kT}\right)} \quad (10.12)$$

en donde la constante ϵ_f es la llamada energía de Fermi. Tal energía se usa como referencia en casi todas las discusiones de energía en los sólidos.



En la figura vemos la estadística de FD. La función es independiente de la distribución de estados. Como en un gas, los electrones en un sólido están en constante agitación y efectúan numerosos choques. Su energía y su cantidad de movimiento cambia con el tiempo. Un cierto nivel de energía del sólido puede estar lleno un instante y vacío el siguiente. La interpretación probabilística nos calcula si observamos un sistema durante un tiempo largo, la fracción del mismo durante el que habrá un electrón en el nivel en cuestión. O si observamos un gran número de sistemas idénticos en que fracción de ellos existe un electrón en ese nivel y en un instante dado.

Esta probabilidad es justamente el valor de la función de -

Fermi para el nivel en cuestión. El máximo valor de la función es la unidad, que indica que un estado estará lleno siempre. La función tiende hacia cero para energías muy altas lo que indica que será muy raro que allí existan electrones.

Si calculamos la función de Fermi para $\mathcal{E} = \mathcal{E}_f$ su valor es $1/2$ independientemente de la temperatura. Esto indica que un nivel localizado en \mathcal{E}_f tiene una probabilidad $1/2$ de estar ocupado (si está en una banda permitida). Cuando \mathcal{E}_f cae dentro de una banda prohibida diremos que la probabilidad de ocupación sería $1/2$ - si hubiese un estado disponible.

Para $T = 0$ todos los estados por debajo de \mathcal{E}_f están llenos, su ocupación es la unidad. Los superiores a \mathcal{E}_f están vacíos, la probabilidad de su ocupación es nula.

Para valores de $\mathcal{E} - \mathcal{E}_f \gg k T$ la distribución de FD - tiende a la de MB:

$$f_{FD} \longrightarrow \exp \left(- \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_f}{k T} \right) \quad (10.13)$$

10.12- Funciones combinadas de distribución. Hemos obtenido en los párrafos anteriores dos resultados. uno referente a la distribución de estados disponibles en las bandas de energía y otro referente a la probabilidad de que uno de esos estados esté ocupado por un electrón. Entonces multiplicando ambas funciones tendremos la distribución de los electrones según la energía y en función de la temperatura.

Como primer ejemplo estudiemos la situación en un metal. Sabemos que sus bandas de energía están solapadas. Su densidad de distribución de estados viene dada por (10.10)

$$S(\mathcal{E}) = A_m \mathcal{E}^{\frac{1}{2}}$$

Si aplicamos la estadística de MB, la distribución de electrones es

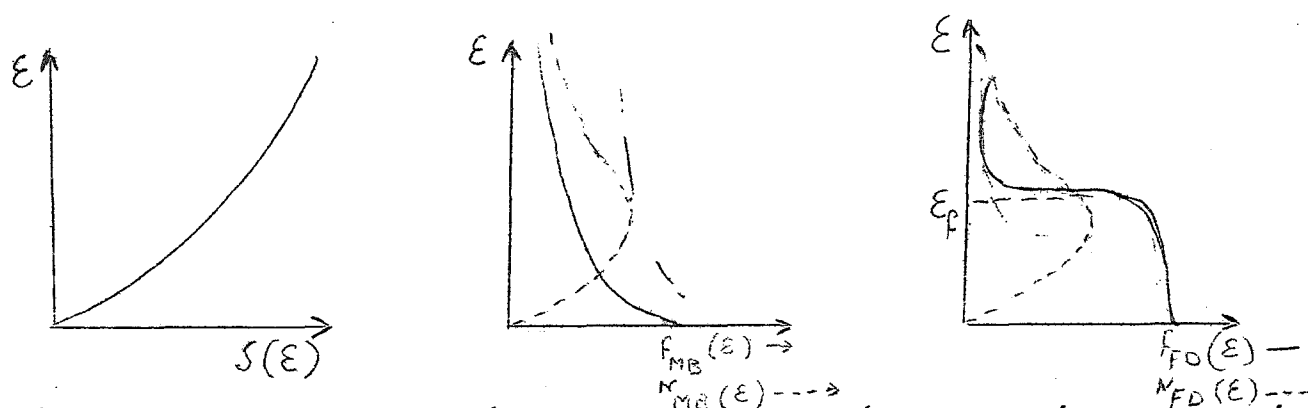
$$N_{MB}(\mathcal{E}) = S(\mathcal{E}) f_{MB}(\mathcal{E}) = A_{MB} \mathcal{E}^{\frac{1}{2}} \exp \left(- \frac{\mathcal{E}}{k T} \right) \quad (10.14)$$

Para la estadística de FD,

$$N_{FD}(\mathcal{E}) = S(\mathcal{E}) f_{FD}(\mathcal{E}) = \frac{A_{FD} \mathcal{E}^{\frac{1}{2}}}{1 + \exp \left[(\mathcal{E} - \mathcal{E}_f)/k T \right]} \quad (10.15)$$

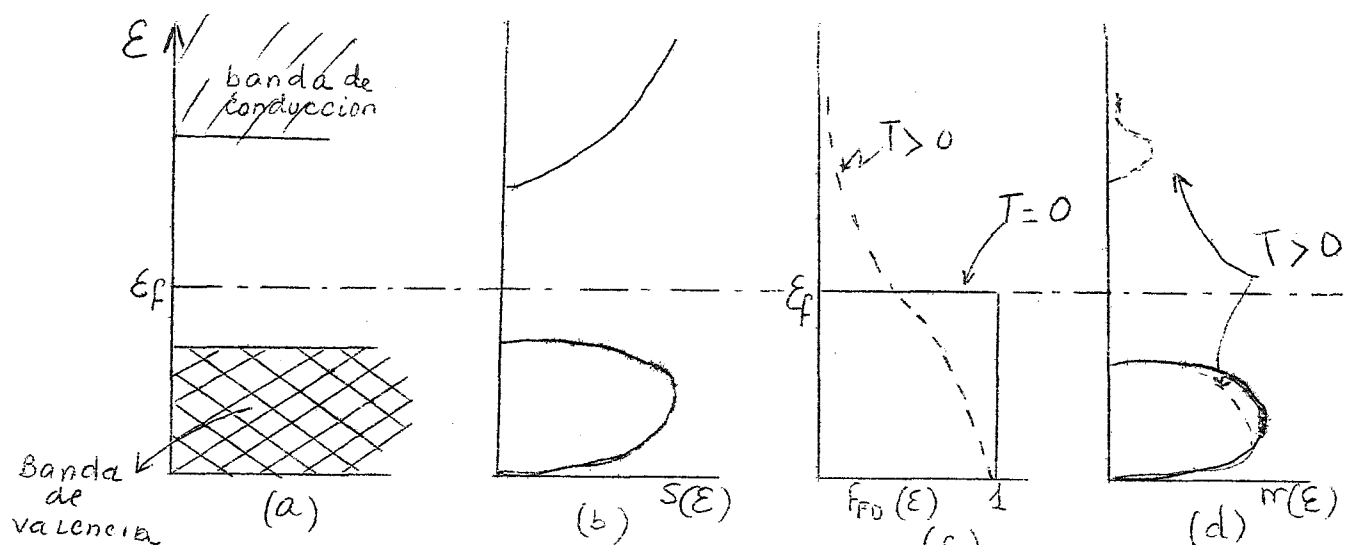
que es la correcta para los electrones en un sólido.

En la figura se notan las diferencias entre ambas distribuciones de electrones.



Así, en general, la función densidad de partículas según la energía está dada por el producto de la función de distribución de estados y la función estadística que da la ocupación de los estados.

Veamos ahora la situación en un semiconductor. En la figura tenemos la representación unidimensional. En (a) la estructura de bandas. En (b) la distribución de estados cuánticos $S(\epsilon)$. En (c) tenemos la distribución de Fermi para dos temperaturas $T = 0^\circ K$ y $T > 0^\circ K$ y en que, como puede demostrarse, el nivel de Fermi cae en el medio de la banda prohibida. En (d), se muestra la distribución de electrones para ambas temperaturas



La figura (d) la interpretamos diciendo que para $T = 0$ no hay electrones en la banda de conducción y la de valencia está llena. Para $T > 0^\circ K$ algunos electrones han sido excitados a la banda de conducción y por lo tanto han dejado estados vacíos en la de valencia.

El número de electrones en una banda será pues

$$\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} N_{FD}(\epsilon) d\epsilon = \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} S(\epsilon) f_{FD}(\epsilon) d\epsilon$$

10.13- Difusión de partículas.- En el movimiento de partículas en un semiconductor hay dos procesos. El primero es el arrastre de partículas por un campo eléctrico y el segundo es la difusión de portadores debida a variaciones en la densidad de partículas en un punto a otro del semiconductor. En ambos casos consideraremos un modelo uni-

dimensional ya que se evitan las complicaciones matemáticas de la realidad tridimensional y se mantiene la visión física del problema.

Difusión es un término aplicado al movimiento mas o menos desordenado de partículas en un sólido cuando no están uniformemente distribuidas en el mismo. En efecto, sabemos que aun con distribución uniforme las partículas se encuentran en movimiento aleatorio constantemente. Sin embargo, si hay una concentración más alta en una región que en otra, las partículas experimentan una fuerza neta que tiende a igualar la situación no uniforme. Habrá un flujo de partículas desde la región con mayor densidad hacia la región de menor y que será proporcional al gradiente de la densidad espacial de partículas. Esta corriente neta se llama corriente de difusión.

Así, para el modelo unidimensional la corriente de partículas será

$$M = -D \frac{dm}{dx} \quad (10.16)$$

donde

m es la densidad lineal de partículas
 D es la constante de difusión con dimensiones de m^2/s

y el signo menos se debe a que el gradiente va dirigido de menor a mayor concentración.

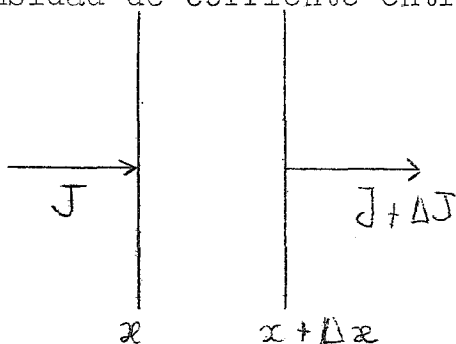
En nuestro caso, si las partículas son electrones y huecos, la corriente eléctrica que se producirá será

$$J_e = e D_n \frac{dn}{dx} \quad \text{y} \quad J_h = -e D_p \frac{dp}{dx} \quad (10.17)$$

Las densidades totales de corriente para huecos y electrones serán:

$$\left. \begin{aligned} J_e &= e \mu_n n E + e D_n \overline{\text{grad } n} \\ J_h &= e \mu_p p E - e D_p \overline{\text{grad } p} \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

Consideremos ahora la difusión en el caso mas general en que la concentración en una determinada región varía con el tiempo. Consideremos esa región del sólido. Se puede producir una generación de partículas a una velocidad g y una desaparición o recombinación de las mismas a la velocidad r . En el plano x la densidad de corriente entrante es $J(x)$ y en el plano $x + \Delta x$ será $J(x) + \Delta J$. En el instante t la densidad volumétrica de carga es ρ . Un instante dt posterior la densidad de cargas ha variado y la variación de la carga contenida en el volumen de base unidad y arista Δx será



$$\Delta \rho \Delta x$$

que procederá de la generación y recombinación en ese volumen durante el tiempo dt y del incremento de corriente que ha salido de dicho volumen, es decir la con-

dición de continuidad es

$$\Delta \rho \Delta x = (g - r) \Delta x \, dt - \Delta J \, dt \quad (10.19)$$

y teniendo en cuenta que la corriente es exclusivamente de difusión.

$$J = - D \frac{d\rho}{dx}$$

queda la ecuación de la difusión

$$\frac{d\rho}{dt} = g - r + D \frac{d^2\rho}{dx^2} \quad (10.20)$$

Las soluciones de dicha ecuación dependen de las condiciones iniciales y de contorno del problema.

La difusión tiene hoy día enorme interés técnico. En todos los cambios de fase hay migraciones y redistribuciones de los átomos procesos típicamente de difusión. El tratamiento del hierro para el mejoramiento de sus propiedades es fundamentalmente un proceso de difusión de ciertos elementos a su través. La oxidación superficial, la impurificación de cristales en atmósfera gaseosa, etc. son hoy día técnicas básicas en la fabricación de semiconductores por la técnica planar.

10.14- Ecuación de continuidad. Difusión y arrastre combinados.- Si se producen al mismo tiempo la difusión y el arrastre de partículas, la ecuación (10.19) es todavía válida si la corriente eléctrica está dada por

$$J = - D \frac{d\rho}{dx} + \mu \rho E$$

Pudiéndose escribir

$$\frac{d\rho}{dt} = g - r + D \frac{d^2\rho}{dx^2} - \mu \frac{d(\rho E)}{dx} \quad (10.21)$$

que se llama la ecuación de continuidad

La generación y recombinación pueden ser complicadas pero, en las aplicaciones en semiconductores y cuando ambos procesos no dependen de la influencia externa, se ha encontrado que una buena aproximación es

$$g - r = \frac{\rho - \rho_0}{\tau} \quad (10.22)$$

en donde el parámetro τ se llama el tiempo de vida de la partícula y ρ_0 representa la densidad inicial.

La ecuación de continuidad queda en la forma

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho - \rho_0}{\tau} + D \frac{d^2\rho}{dx^2} - \mu \frac{d}{dx} (\rho E) \quad (10.23)$$

Esta ecuación se aplicara a los electrones sustituyendo por $-en$ y para los huecos por ep .

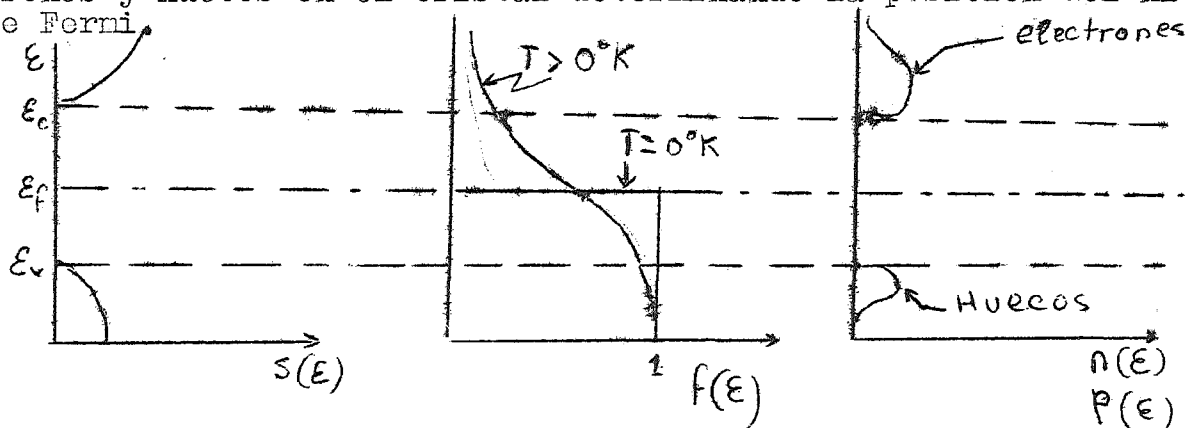
1015- Semiconductores intrínsecos.— En el comportamiento eléctrico de un semiconductor los defectos de su red cristalina y las impurezas que el cristal contenga tienen una influencia extraordinaria. Los defectos cristalinos se refieren a posiciones que quedan vacantes en la estructura del cristal, a la aparición de dislocaciones y, en general, a cualquier ruptura de la perfecta regularidad del cristal. La importancia de los defectos cristalinos nace del hecho que tales imperfecciones pueden originar niveles que caigan dentro de la banda prohibida y que son utilizados como etapa intermedia en la recombinación de huecos y electrones. Se ha encontrado que la velocidad voluntaria de recombinación depende de la densidad de defectos del cristal es decir de su imperfección. En definitiva, es el parámetro τ que hemos definido como tiempo de vida el que queda afectado por la densidad de defectos.

Se denominan semiconductores intrínsecos aquellos que no tienen átomos de impurezas aunque pueden tener defectos cristalinos. Los semiconductores intrínsecos no son importantes como formadores de dispositivos electrónicos pero son la base sobre la cual se realizan los semiconductores extrínsecos y señalan las propiedades del funcionamiento del dispositivo.

Consideremos un semiconductor intrínseco como el Ge puro. A 0°K todos los electrones están en los niveles mas bajos y la banda de valencia está llena. La energía necesaria para trasladar uno de estos electrones a la banda de conducción es justamente la anchura de la banda prohibida ϵ_g . Para el Ge, ϵ_g vale 0.67 eV a 300°K . A la temperatura ambiente la energía térmica es suficiente para la generación de un número apreciable de paros electrón-hueco: el electrón salta la banda prohibida y se convierte en casi-libre en la banda de conducción y en la de valencia queda un hueco. Este proceso se llama de excitación o generación intrínseca y la conducción resultante, conducción intrínseca.

Intrínseco significa simplemente que es una propiedad del cristal en su forma mas pura.

Podemos tener una idea cuantitativa de las densidades de electrones y huecos en el cristal determinando la posición del nivel de Fermi.



Para el caso del cero absoluto el nivel de Fermi debe quedar en alguna parte de la banda prohibida. Esto se debe a que la banda de valencia está llena, $f(E) = 1$, y la de conducción está vacía, $f(E) = 0$. En efecto, se puede demostrar que

$$\epsilon_f = \frac{\epsilon_c + \epsilon_v}{2} \quad (10.24)$$

es decir, en un semiconductor intrínseco el nivel de Fermi está - en el medio de la banda prohibida. También se puede decir que como los electrones y huecos se generan y recombinan en pares, su número será el mismo.

Su llamamos $n(\mathcal{E})$ y $p(\mathcal{E})$ las densidades de electrones y huecos se puede demostrar que el producto de ambas densidades depende únicamente de la temperatura y de la anchura de la banda prohibida, pero no de la posición del nivel de Fermi.

$$n p = n_i^2 \quad (10.25)$$

El número n_i se llama la densidad intrínseca de portadores.

10.16 - Semiconductores extrínsecos. Donadores y aceptores. - Cuando a un semiconductor se le añaden átomos de impurezas estos pueden sustituir a uno de los primitivos o colocarse intersticialmente. En ambos casos su constitución química diferente puede aportar nuevos niveles cuánticos a la estructura de bandas del cristal y que corresponden a sus propios estados. Dependiendo de la valencia de la impureza y de cómo queda el nivel de energía que introducen, estos átomos extraños pueden tener un efecto muy importante en las propiedades eléctricas del semiconductor.

La situación puede intuirse si pensamos en la situación que se produce en el Ge y el Si, por ejemplo, cuando introducimos átomos de elementos del Grupo V o del III de la tabla periódica -- (P, Sb, Bi, As, y B, Al, Ga, I respectivamente). Si sustituimos un átomo de Ge por uno del V encontramos que sólo cuatro de sus cinco electrones pueden formar enlace covalente en el cristal. El quinto está ligado al átomo de impureza pero muy débilmente y bastará una pequeña energía para liberarle y convertirlo en electrón de conducción. A estas impurezas que proporcionan electrones de conducción se las denomina donantes o donadores.

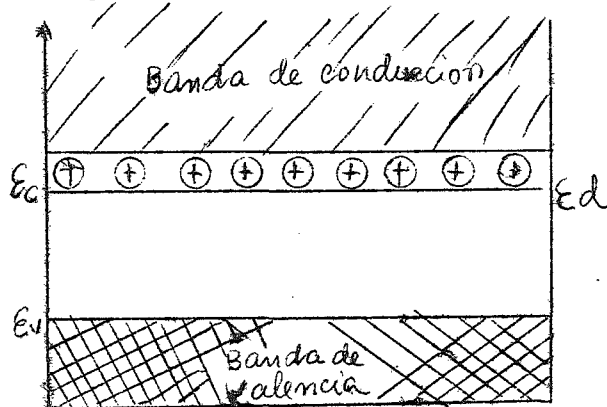
Una situación análoga la tendremos para un elemento del grupo III. Ahora a este elemento le falta un electrón para completar sus enlaces con el cristal. En este caso decimos que el átomo tiene un hueco o estado vacío débilmente ligado.

Para los elementos de valencia 5, como sus "quintos electrones" están débilmente sujetos, sus niveles energéticos deben estar cerca de la banda de conducción. Cuando un electrón está en el estado del donador, el estado es neutro. Cuando el electrón se excita a la banda de conducción, el donador queda con una carga positiva y se dice que está ionizado. Los elementos de valencia 3, por su facilidad de capturar electrones, deben tener sus niveles cerca de la banda de valencia. Estos niveles aceptores estarán neutros cuando estén vacíos y cuando capturan un electrón quedan negativamente cargados produciendo un hueco en la banda de valencia.

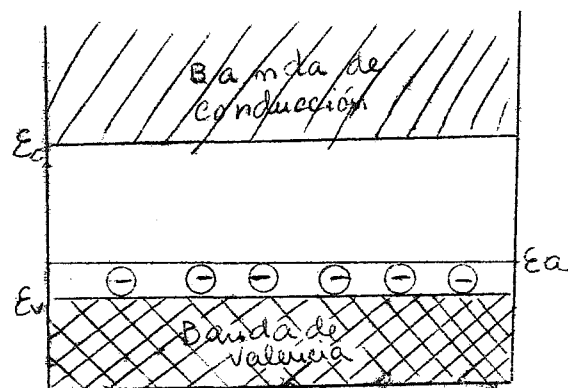
Un cristal con donadores se llama un semiconductor tipo n, porque sus portadores de carga son principalmente negativos, y uno con aceptores se denomina de tipo p ya que sus portadores son positivos.

A la temperatura ambiente se habrán producido un cierto número de pares electrón-hueco y además se habrán ionizado casi todos los donadores o aceptores. Los electrones se denominan portadores

res mayoritarios en un semiconductor tipo n y los huecos son los ma



Estructura de un semiconductor tipo n, con donadores ionizados.



Estructura de un semiconductor tipo p, con aceptadores ionizados.

yoritarios en un semiconductor tipo p. Los portadores no debidos a las impurezas se denominan portadores minoritarios (electrones en el tipo p y huecos en el n).

En un semiconductor tipo n tendremos a la temperatura ambiente: en la banda de conducción gran número de electrones procedentes de la ionización de los donadores y unos pocos producidos por pares electrón-huero de origen térmico y en la banda de valencia los correspondientes huecos térmicos. Estos son los minoritarios. Análogamente para el semiconductor tipo p.

El nivel de Fermi se habrá desplazado respecto al semiconductor intrínseco. En el tipo -n se ha desplazado hacia la banda de conducción y en el tipo p hacia la banda de valencia.

Por otra parte el resultado (10.25) se mantiene y el producto de mayoritarios por minoritarios se mantiene constante para una cierta temperatura y material,

$$pn = n_i^2 = f(T, \epsilon)$$

17- Efecto Hall.— En 1.879 E. H. Hall descubrió el efecto que lleva su nombre. Encontró que aparecía una diferencia de potencial transversal cuando una tira de metal que transporta una corriente eléctrica se coloca dentro de un campo magnético. Este efecto es muy débil en los metales pero muy intenso en el germanio y el silicio.

La utilización del efecto Hall en los estudios de conductividad eléctrica ha sido en extremo provechoso para estudiar la física de conductores y semiconductores. Además, los resultados de las medidas del efecto Hall en semiconductores han sido una fuente de problemas durante muchos años. En efecto, siempre se pensó que la conducción eléctrica se debía a portadores negativos y sin embargo las medidas en muchos semiconductores indicaban que la conducción se realizaba por partículas cargadas positivamente. Hoy día podemos explicar la situación pensando en la conducción por huecos de las bandas casi llenas.

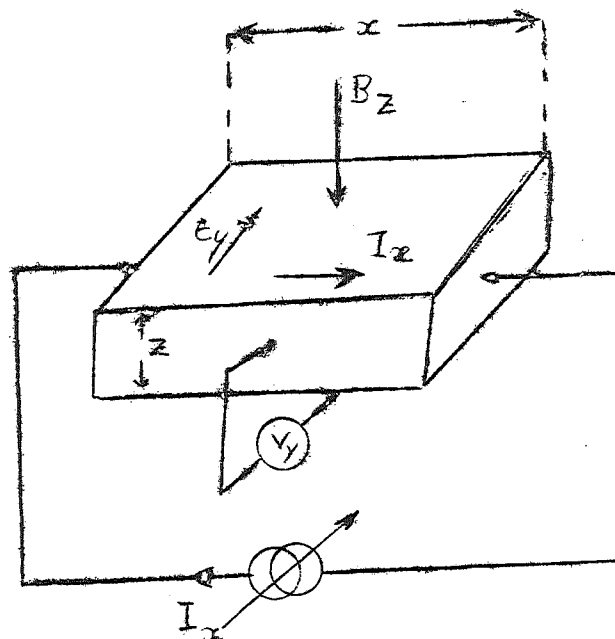
En la figura se indica el experimento Hall. Una corriente circula en la dirección x y un campo magnético se aplica en la dirección z .

Si la corriente está producida por portadores de carga q con una velocidad media que tiene componente en el sentido x . La fuerza de Lorentz sobre estos portadores vale:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Inicialmente, por efecto del campo magnético los portadores son desviados hacia los lados laterales produciendo una mayor concentración en un lado - que en otro. Así aparecerá un gradiente de potencial perpendicular al campo magnético y a la corriente. Una situación de equilibrio cuando los efectos del campo eléctrico transversal y del magnético se igualen. La diferencia de potencial transversal puede medirse (V_y).

En el equilibrio



$$- E_y + v_x B_z = 0$$

$$v_x = \frac{E_y}{B_z}$$

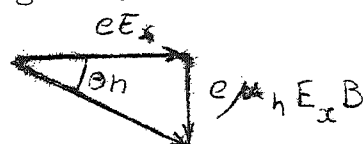
con los sentidos indicados en la figura.

El problema principal en la discusión del efecto Hall consiste en relacionar v_x con el campo E_x . La movilidad media a utilizar es -

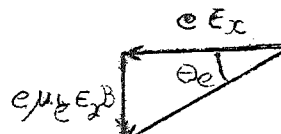
diferente a la utilizada en la conductividad normal y frecuentemente se denomina movilidad Hall. Así

$$v_x = \mu_x E_x$$

La situación para electrones y huecos sería la indicada - en las figuras.



(a) huecos



(b) electrones

$$R_H = \frac{E_y}{e p \mu_h \frac{E_x B}{x}} = \frac{1}{e p} \quad (10.28)$$

y para los electrones análogamente

$$R_H = \frac{-1}{e n} \quad (10.29)$$

En ambos casos hemos supuesto una movilidad única para electrones y huecos y obtenemos que el coeficiente de Hall da una medida directa de la concentración de huecos y electrones. En el caso en que ambos portadores estén presente la situación sería complicada y se deja como ejercicio al alumno.

En la práctica para la medida del coeficiente de Hall se mide el voltaje creado por el campo transversal, V_y , y la corriente total I en lugar de la densidad de corriente. Suponiendo una muestra en estudio de dimensiones x, y, z

$$I_x = z y J_x$$

$$V_y = y E_y$$

con lo que

$$R_H = \frac{\frac{V_y}{y}}{\frac{I}{zy} B} = \frac{V_y z}{I B} \quad (10.30)$$

Volvemos a insistir en el gran papel que el efecto Hall ha jugado, y aún tiene, en el estudio experimental de semiconductores permitiendo medir movilidades y concentraciones.

Hoy día son numerosas también las aplicaciones técnicas - destacando los mediadores de campo magnético por efecto Hall.

- - -

CAMPOS Y ONDAS ELECTROMAGNETICAS

Parte 1ª: Campos eléctricos y magnéticos estacionarios.

- 11.1- Introducción.- Vamos a empezar el estudio de nuestros conceptos con campos eléctricos y magnéticos estáticos, no van a variar con el tiempo. La situación es menos completa que en el caso de cargas y corrientes que varían con el tiempo y tiene el peligro de que algunas leyes que aquí se manejen, y que son incompletas, se quiera extender su validez en todas las situaciones. Por ejemplo, el uso del voltaje definido a lo largo de una trayectoria como sinónimo de la diferencia de potencial en los extremos del camino es válido para campos estáticos, pero no para campos variables con el tiempo cuando una parte significativa del campo eléctrico la genera el campo magnético variable. Es decir, debemos recordar de vez en cuando que en esta primera parte estamos en estática y que luego habrá que añadir las cantidades necesarias generadas por el campo eléctrico y magnético variables con el tiempo.

Empezamos el estudio de los campos a partir de algunas leyes experimentales que consideramos como fundamentales y válidas con toda generalidad. Estas leyes representan una generalización de algunos experimentos y puede suceder que dadas las diferentes condiciones y magnitudes se manejen en formas distintas a la versión original. Se trata de relaciones derivadas que pueden ser mas convenientes para el diseño y el análisis o para ciertos problemas.

La siguiente etapa será extender estas leyes desde el mundo microscópico, donde han sido deducidas, a los sistemas infinitos y así obtener ecuaciones diferenciales con las cuales podremos estudiar variaciones continuas y discretas. Una vez que esta extensión ha sido justificada, la ecuación diferencial es la herramienta más valiosa para el estudio de los campos.

- 11.2- Ley de Gauss.- Recordemos como a partir de la ley experimental de Coulomb dedujimos que el flujo del vector desplazamiento a través de una superficie cerrada cualquiera era igual a la carga encerrada q . En notación vectorial.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \quad (11.1)$$

en donde \vec{D} es el vector desplazamiento en cada punto de la superficie en cuestión.

$d\vec{S}$ es el vector representativo del elemento de superficie, de magnitud la del elemento dS que se considera y de dirección la de la normal hacia fuera a la superficie en ese punto.

Si la carga en la región en estudio viene dada como una densidad de carga (cul/m^3) para cada punto de la región, la carga total se obtendrá integrando esta densidad en el volumen de la región

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \quad (11.2)$$

La densidad ρ de carga debe integrarse para todo el volumen V encerrado por la superficie S .

- 11.3- La divergencia de un campo electrostático.

Hasta ahora hemos obtenido una ley, la de Gauss, derivada de una

experimental (Coulomb) para magnitudes finitas. Vamos a efectuar el paso anunciado en la Introducción para sistemas infinitesimales.

Consideremos un volumen elemental ΔV y calculemos

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_V \rho \, dV}{\Delta V}$$

El segundo miembro es ρ . El primero es el flujo eléctrico por unidad de volumen que sale a través de un volumen infinitesimal. Pero esta magnitud es, por definición, la divergencia de \vec{D} , entonces

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (11.3)$$

A través del operador ∇ (que es un verdadero vector)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \text{div } \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad (11.4)$$

La expresión (11.3) es importante y la consideraremos como la generalización de la ley de Gauss a un punto del espacio.

Por último hay que señalar que la formulación de la ley de Gauss en la forma

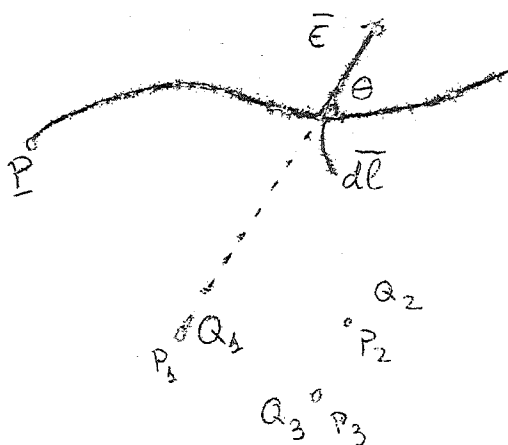
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{D} \, dV$$

es completamente general para cualquier vector y constituye el teorema de Gauss.

11.4- Propiedad conservativa de los campos eléctricos.- Podemos seguidamente considerar la energía del campo electrostático. Por ejemplo, si la energía depende la situación en un instante dado únicamente o es función de cómo se ha llegado a ese instante. El resultado es que la energía del campo electrostático depende solo de las magnitudes y posiciones de las cargas y no de como han llegado a esa situación.

Sea un sistema de carga Q_1, Q_2, \dots colocadas en los puntos P_1, P_2, \dots . Calculemos el trabajo que hay que desarrollar para tras-

ladar una pequeña carga Δq desde el infinito hasta un punto P . Tomemos este punto como origen de coordenadas y entonces las cargas Q_i están en las posiciones $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots$. Admitiendo el principio de superposición, el trabajo desarrollado para mover Δq viniendo el campo creado por Q_1 en \vec{R}_1



$$U_1 = - \int_{\infty}^0 \vec{F}_1 \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^0 \Delta q \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} =$$

$$= - \frac{\Delta q Q_1}{4\pi \epsilon r^2} \cos \theta \, dl = -$$

$$\int_{\infty}^{PP_1} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{\Delta q Q_1}{4\pi\epsilon R_1}$$

Análogamente para las demás cargas

$$U = \frac{(\Delta q) Q_1}{4\pi\epsilon R_1} + \frac{(\Delta q) Q_2}{4\pi\epsilon R_2} + \dots \quad (11.5)$$

Esta ecuación muestra que el trabajo realizado es sólo función de las posiciones finales y no del camino seguido. Esta conclusión nos lleva a otra: si la carga describe un camino cerrado, no se efectúa trabajo

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (11.6)$$

11.5.- Potencial electrostático..- Para resolver las ecuaciones diferenciales de los campos conviene muy frecuentemente introducir, como herramienta matemática, las denominadas funciones potenciales, que pueden ser de gran utilidad para hallar la solución y que no necesitan aparecer en el resultado final.

La función potencial en electrostática es una magnitud escalar definida tal que la diferencia de los valores de la función en dos puntos P y Q es

$$\phi_P - \phi_Q = - \int_Q^P \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (11.7)$$

Su significado físico es el del trabajo realizado sobre la unidad de carga para desplazarla de Q a P.

Si el potencial en el infinito se toma como cero, es evidente que el potencial en un punto P debido a un sistema de cargas será:

$$\phi = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon R_2} + \dots \quad (11.8)$$

Generalizando para el caso de una distribución continua de cargas

$$\phi = \int_V \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon r} \quad (11.9)$$

Como vemos la primera ventaja del uso del potencial es que se obtiene por suma algebraica, no hay que utilizar adiciones vectoriales como pasaría al tratar con campos eléctricos directamente. Veamos como los campos pueden obtenerse del potencial.

Para dos puntos separados la diferencia de potencial es

$$d\phi = - \vec{E} \cdot d\vec{l} = - (E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

y teniendo en cuenta que

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

11.7- Condiciones de contorno en un dieléctrico.-

Como quedó descrito en 8.6 las condiciones son

$$\begin{aligned} D_{n_1} &= D_{n_2} \\ E_{T_1} &= E_{T_2} \end{aligned} \quad (11.12)$$

También se comprende que el potencial electrostático es -
continuo a través de la separación

$$\phi_1 = \phi_2$$

Hay que señalar como las líneas de intensidad de campo cambiarán de dirección al cruzar la superficie de separación entre dos dieléctricos de distinta permitividad.

11.8- Ecuaciones de Poisson y Laplace.-

Seguimos con nuestro intento de encontrar expresiones diferenciales para los campos. Ya hemos encontrado una para \vec{D} . Si quisieramos trabajar con potenciales, pensemos en una región de constante dieléctrica ϵ , constante, y con densidad cúbica de carga ρ . Entonces

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho = \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho$$

luego

$$\text{div (grad } \phi) = \nabla \cdot \nabla \phi = - \frac{\rho}{\epsilon}$$

En coordenadas rectangulares esta laplaciana de un escalar es

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi = - \frac{\rho}{\epsilon} \quad (11.13)$$

ecuación denominada de Poisson.

Para el caso especial en que no hay cargas se tiene

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (11.14)$$

conocida como ecuación de Laplace.

Como se ve son relaciones para el potencial electrostático que se deben verificar en cada configuración. Hace falta conocer las condiciones de contorno en cada caso para obtener la solución para ϕ en cada problema.

11.9- Energía de un sistema electrostático.

En 8.7 se calculó la densidad de energía almacenada en el campo eléctrico existente entre las placas de un condensador sencillo,

$\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$. Veremos como tal expresión es general para cualquier dis-

tribución de cargas.

Para llevar una carga q' desde el infinito hasta un punto situado a la distancia r de la carga q , el trabajo realizado era

$$U_E = \frac{q q'}{4 \pi \epsilon r}$$

Para un sistema de cargas

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_n \sum_m \frac{q_n q_m}{4 \pi \epsilon r_{nm}} \quad (11.15)$$

El factor $\frac{1}{2}$ aparece ya que para cada n y m se efectúa la suma para todas las partículas y de esta manera cada contribución de energía aparece dos veces.

(11.15) nos indica que cuando $q_n ; q_m, r_{nm} = 0$ la energía para llevar una carga finita a un punto es infinita. Realmente nosotros trabajaremos siempre con distribuciones espaciales.

Teniendo en cuenta que el potencial creado por todas las cargas en el punto ocupado por la carga m -ésima es

$$\phi_m = \sum_n \frac{q_n}{4 \pi \epsilon r_{nm}}$$

Con lo que (11.15) puede escribirse

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_n \phi_m q_m \quad (11.16)$$

Y extendiendo para un sistema continuo de densidad de carga ρ

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2} \int_V \rho \phi \, dV = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \cdot \vec{D}) \phi \, dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\phi \vec{D}) \, dV - \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot (\nabla \phi) \, dV \end{aligned}$$

La primera integral se puede transformar en integral de superficie pero si V de contener todos los campos, esta superficie hay que tomarla como infinita. Como ϕ decrece según $1/r$, \vec{D} según $1/r^2$ y la superficie aumenta según r^2 ,

$$\int_V \nabla \cdot (\phi \vec{D}) \, dV = \oint_{S_\infty} \phi \vec{D} \cdot \vec{dS} = 0$$

Quedando

$$U_E = - \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot (\nabla \phi) \, dV = - \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV$$

gía Que indica que cada elemento de volumen dV contiene una ener-

$$\frac{dU}{E} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} dV \quad (11.17)$$

10.- El rotacional de un campo electrostático.— Recordemos que el concepto de divergencia lo desarrollamos partiendo del flujo de un vector a través de una superficie cerrada finita. Según el mismo espíritu, podemos considerar la circulación de un vector a lo largo de una curva cerrada. Tal expresión la encontramos ya en mecánica al estudiar el trabajo realizado por una fuerza

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Supongamos que al igual que en la div se enpequeñecía el volumen, vamos considerando curvas cada vez más pequeñas que son recorridas por un vector y a las que cada vez corresponde menor área. También, al igual que para la divergencia consideramos el límite del flujo al volumen, aquí podemos considerar el límite de la circulación en el bucle al área del bucle. Sin embargo ahora las cosas son diferentes pues el área dS bordeada por el bucle es realmente un vector como sabemos. No podemos tomar el cociente de un escalar a un vector. En realidad dado un punto P los entornos cerrados que este punto admite se pueden orientar como deseamos. Elegida una orientación, normal a ese entorno, podemos calcular

$$\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{F} \cdot d\vec{S}}{dS} \quad (11.18)$$

en donde el signo viene indicado por la regla del sacacorchos. El resultado que obtengamos está relacionado con el punto P y con la dirección escogida. Para este mismo punto, podemos pues tomar tres direcciones independiente \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} y obtener tres números diferentes. Parece lógico pensar en estos tres números como componentes de un vector, que llamamos $\text{rot } \vec{F}$. Es decir

$$\text{rot } \vec{F} \Big|_i = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{F} \cdot d\vec{S}_i}{\Delta S_i}$$

Se puede demostrar que

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (11.19)$$

Es decir el rotacional de un campo vectorial es una función vectorial cuya componente en un punto, y en una dirección particular, se encuentra orientado un área infinitesimal en este punto normal a la dirección especificada, y encontrando la circulación por unidad de área.

El que en un punto de un campo vectorial el rot sea distinto de cero indica que la circulación a lo largo de un entorno de ese punto no es nula. Intuitivamente es una tendencia del campo a la rotación, al torbellino, superpuesto, quizás, a un flujo en una determinada dirección. De todas maneras no debe asociarse este nombre con

la curvatura del campo ya que un campo con líneas formando círculos cerrados puede tener rot nulo en casi todos sus puntos, por ejemplo. Al aplicar este concepto a un campo electrostático \vec{E} el resultado es sencillo: el rotacional de un campo electrostático \vec{E} es siempre nulo. El resultado se deduce del hecho de que la circulación del campo electrostático a lo largo de un camino cerrado es siempre nula.

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0 \quad (\text{en cualquier punto})$$

(11.20)

En términos finitos, si la circulación a lo largo de cualquier curva cerrada es nula, el flujo del rotacional de ese vector a través de una superficie que se apoye en esa curva debe ser nulo (teorema de Stokes).

De otra manera, si el campo electrostático es conservativo, admite una función potencial ϕ de la cual se puede deducir como su gradiente. Matemáticamente se ve que el rotacional del gradiente de una función potencial es siempre nulo. De (11.20) podemos deducir que una condición suficiente para que un campo sea conservativo es que su rotacional sea nulo en cualquier punto.

El rotacional de un vector veremos que es una excelente herramienta en el tratamiento de campos eléctricos y magnéticos cuyo rot no sea nulo.

Podemos concluir diciendo que hemos introducido dos tipos de derivadas de un campo vectorial. En uno, la divergencia, aparece la variación de las componentes del vector en su propia dirección, $\partial F_x / \partial x$, etc. En el segundo, el rotacional, aparecen algo así como "derivadas laterales" en que se estudia la variación de F_x cuando nos desplazamos en las direcciones y ó z .

11.11- El concepto de campo magnético.

Nuestra idea de campo eléctrico nació de la fuerza que experimenta una carga colocada en las proximidades de otras cargas. Se ha determinado, también experimentalmente, que una carga en movimiento sufre una fuerza cuando pasa por una región en que existen corrientes de otras cargas en movimiento. Para describir estas fuerzas entre corriente decimos que en esa región existe un campo magnético.

La fuerza que aparece entre dos elementos de corriente depende de la magnitud de las corrientes, del medio y de la distancia entre ambas corrientes, de una manera similar a la fuerza entre cargas. Sin embargo, la corriente es un vector y hay que definir más cuidadosamente ese campo magnético. Definimos el vector \vec{B} , inducción o densidad de flujo magnéticos, tal que la fuerza que ejerce sobre un elemento de corriente de longitud $d\vec{l}$ y corriente I es

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (11.21)$$

que equivale a que la fuerza ejercida sobre una partícula q que se mueve con velocidad \vec{v} es

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Recordemos que el vector intensidad de campo magnético \vec{H} se define como

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

siendo μ la permeabilidad del medio.

En el sistema MKS \vec{B} se mide en weber m⁻² y H en A. m⁻¹. El valor de la permeabilidad del vacío es

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H. m}^{-1}$$

El valor μ de la permeabilidad de cualquier medio se suele poner en la forma

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

siendo μ_r la permeabilidad relativa del medio.

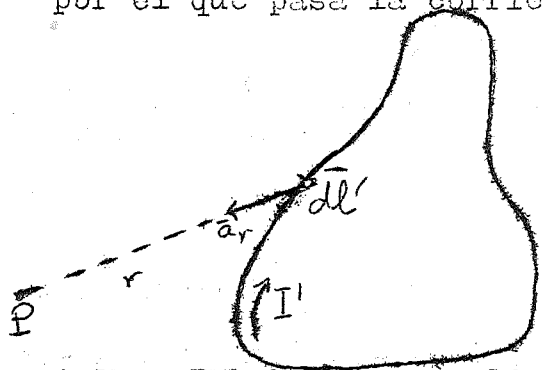
11.12- Ley de Ampère.— La ley de Ampère, deducida experimentalmente a partir de una serie de experimentos muy ingeniosos, nos dice como calcular el campo magnético creado por un sistema de corrientes continuas. En realidad existen varias formulaciones, aunque equivalentes naturalmente, siendo su aplicación mas conveniente para ciertos problemas. La circulación de un campo magnético estático a lo largo de un camino cerrado es igual a la corriente rodeada por la trayectoria.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (11.22)$$

La formulación anterior es cómoda para trayectorias con ciertas simetrías. En general puede ser más útil calcular la contribución al campo magnético debida a cada elemento de corriente y luego integrar tales contribuciones. Tal es la ley de Biot-Savart.

En la figura la corriente I' circula por el alambre cerrado. Un elemento de corriente lo constituye un trazo $d\vec{l}'$ del conductor por el que pasa la corriente I' . El campo $d\vec{H}$ creado en el punto P, distante r de ese elemento,

$$\text{es } d\vec{H} = \frac{I' d\vec{l}' \times \vec{a}_r}{4\pi r^2}$$



donde \vec{a}_r es el vector unitario tomado desde el elemento hacia el punto P.

Para obtener el campo magnético total en P habrá que realizar suma vectorial de tales contribuciones

$$\vec{H} = \int \frac{I' d\vec{l}' \times \vec{a}_r}{4\pi r^2} \quad (11.23)$$

11.13- El rotacional de un campo magnético.

Dado un cierto camino cerrado, el teorema de Stokes nos dice que la circulación del campo magnético a lo largo de él es igual al flujo del rot del campo a través de una superficie que se apoye en dicho contorno.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S}$$

Teniendo en cuenta que la corriente I total encerrada por el contorno se puede poner en la forma

$$\int_S \vec{i} \cdot d\vec{S} = I$$

siendo \vec{i} el vector densidad de corriente ($A \cdot m^{-2}$) de donde

$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{i} \quad (11.24)$$

Esta relación es la mas general entre un campo magnético estático y las corriente que lo generan. Sin embargo la ecuación (11.24) sola no determina \vec{H} unicamente para \vec{i} dada. Pensemos que el rotacional de un vector que es el gradiente de un potencial es siempre nulo.

Calculemos ahora la divergencia del vector inducción magnética. De una manera intuitiva se comprende que el campo magnético no tiene manantiales ni sumideros, todas sus líneas de campo son cerradas. El flujo unitario para un pequeño volumen, como indica (), sea nulo

$$\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (11.25)$$

Ahora (11.24) y (11.25) determinan unívocamente el campo magnético para una distribución de corriente dada salvo el caso de sumar un campo constante y uniforme en todo el espacio.

1114- El vector potencial magnético.

Hemos encontrado que el potencial escalar ϕ (x y z) nos daba un medio sencillo para calcular el campo eléctrico

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

Un intento análogo no se puede realizar con \vec{B} . El rotacional de \vec{B} no tiene que ser cero y \vec{B} no puede ser, en general, el gradiente de un potencial escalar. Concomite, sin embargo, otro medio para construir un vector: como rot de otro vector. \vec{B} podría representarse, no como el gradiente de un escalar, sino como el rot de otra función vectorial

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \text{rot } \vec{A} \quad (11.26)$$

Por una relativa analogía, llamemos a \vec{A} el vector potencial magnético. Una de las ventajas de nuestra definición es que (11.25) se verifica automáticamente ya que $\nabla \cdot \nabla \times \vec{F} \equiv 0$ para cualquier \vec{F} .

O inversamente, el hecho de que $\text{div } \vec{B} = 0$ nos presenta la oportunidad de tomar \vec{B} como el rot de otro vector. El vector potencial magnético no tiene un significado físico sencillo, como lo tiene el electrostático, mas allá de lo que indican sus ecuaciones de definición.

Nuestra tarea es ahora calcular \vec{A} cuando conocemos una distribución de corriente \vec{i} . De (11.26) podremos luego obtener \vec{B} .

La ecuación diferencial para la intensidad de campo magnético en función de la densidad de corriente es

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{i}$$

y tomando a \vec{B} como el rot del potencial vector \vec{A}

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{i}$$

ecuación diferencial que relaciona \vec{A} con la densidad de corriente.

En coordenadas cartesianas se puede comprobar que

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A})$$

siendo $\nabla^2 \vec{A}$ la laplaciana de un vector definida en coordenadas cartesianas, como el vector suma de las laplacianas de sus tres componentes escalares

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \vec{i} + \nabla^2 A_y \vec{j} + \nabla^2 A_z \vec{k}$$

Como en la definición \vec{A} aparece su rot, su div podemos tomarla a voluntad. Si requerimos que

$$\text{div } \vec{A} = 0$$

o en otras palabras, de entre todas las funciones vectoriales que verifican que $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$ consideramos sólo aquellas que tienen divergencia nula.

En este caso obtenemos

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{I} \quad (11.27)$$

Ecuación vectorial para el potencial vector equivalente a la ecuación de Poisson para electrostática. En realidad son tres ecuaciones escalares que tienen exactamente la forma de la de Poisson. Ejemplo

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu i_x$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Recordemos que la solución de la ecuación de Poisson era de la forma

$$\phi(x_1, y_1, z_1) = \int_V \frac{\rho(x_2, y_2, z_2) dV_2}{4\pi\epsilon r_{12}} = \int_V \frac{dV}{4\pi\epsilon r}$$

la solución para A_x debe ser

$$A_x(x_1, y_1, z_1) = \int_V \frac{\mu i_x(x_2, y_2, z_2) dV_2}{4\pi r_{12}}$$

y combinando las tres componentes

$$\vec{A} = \int_V \frac{\mu \vec{I} dV}{4\pi r} \quad (11.28)$$

en donde r es la distancia del elemento de corriente que tenemos en cuenta en la integración al punto en que calculamos \vec{A} .

Se puede comprobar que $\text{div } \vec{A} = 0$

1115- Condiciones de contorno para \vec{B} y \vec{H} .

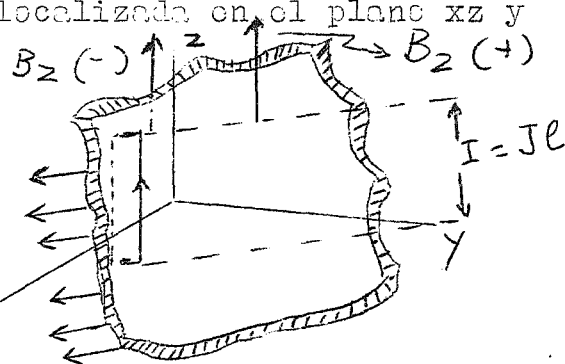
En 8.12 ya indicamos las condiciones de contorno para regiones sin corrientes

$$H_{t_1} = H_{t_2}$$

$$B_{n_1} = B_{n_2}$$

Para el caso en que existan corriente estudiaremos el problema con mas generalidad posteriormente, aunque ya podemos dar algunos resultados.

Supongamos una lámina indefinida localizada en el plano xz y por la que circula una corriente en la dirección x. El espesor de la lámina no es muy importante, pero supongamos que es d. Si la densidad de corriente es i (A/m²) cada metro tomado en la dirección z contiene una corriente i d (A.m⁻¹). Llamaremos a esta magnitud J densidad de corriente por unidad de longitud y es la que interviene en la modificación de \vec{B} . El



campo magnético total, debido a la corriente y a otra fuente externa, tiene la dirección z. Llamemos B (+) al campo justo enfrente de la lámina y B (-) el campo inmediatamente detrás. Consideremos la circulación de \vec{B} a lo largo del rectángulo dibujado. La circulación total es

es $l \left[B_z^{(+)} - B_z^{(-)} \right]$ y la corriente abrazada es $l J$ Amperios.

$$B_z^{(+)} - B_z^{(-)} = \mu J \quad (11.29)$$

Como vemos la lámina de corriente produce un cambio en la componente tangencial de B , componente perpendicular a J . Esta discontinuidad nos recuerda la producida en E_n por una lámina conductora con cierta carga superficial.

Posteriormente estudiaremos las condiciones de contorno para campos variables y se formularán con mas generalidad los resultados anteriores.

Segunda parte: Campos variables con el tiempo.

11.16- Introducción.- Hasta ahora hemos deducido un grupo de ecuaciones capaces de describir los campos debidos a cargas y corrientes estáticas. Varias veces se señaló las distintas formas en que pueden expresarse las leyes fundamentales y que la elección dependía del problema a resolver.

El objetivo para estos campos variables con el tiempo es análogo. Parte de la teoría será simplemente una extensión de la estática, pero las corrientes y cargas variables producen efectos adicionales que complican la solución de los problemas.

11.17- Ley de Faraday.- Faraday encontró experimentalmente que cuando el flujo magnético que pasaba a través de un circuito cerrado variaba, se inducía un voltaje en este circuito proporcional a la velocidad de variación de ese flujo.

Esta ley general la podemos escribir

$$V = - \frac{d\psi}{dt} \quad (11.30)$$

donde V es el voltaje inducido en el circuito y ψ es el flujo que lo atravesaba. Sabemos que esta ecuación sirve para el caso de una espira que se desplaza en un campo no uniforme o cuando es el campo el que varía alternativamente con el tiempo y la espira permanece en reposo.

Una generalización importante es la aparición de una fuerza electromotriz en cualquier camino cerrado del espacio. Dado que la resistencia del camino no entra en la ley (11.30), parece lógico extenderla al caso de un circuito con resistencia infinita.

Si definimos la fuerza electromotriz según un camino cerrado, bien en el espacio, en dieléctricos, en conductores o en cualquier combinación de estos, como la circulación del campo eléctrico a lo largo de ese camino

$$f_{em} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (11.31)$$

esta f_{em} es igual, según Faraday, a la velocidad de variación del flujo magnético a través de ese circuito

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (11.32)$$

siendo S una superficie cualquiera que se apoya en la trayectoria especificada.

Aplicando el teorema de Stokes

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Y obtenemos la forma diferencial de la ley de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (11.33)$$

Como la circulación del campo eléctrico a lo largo de un camino cerrado no tiene por qué ser nula para campos variables con el tiempo, tendremos que realizar un trabajo cuando desplazemos una carga según ese circuito cerrado.

11.18- Continuidad de carga.-

Dado un cierto volumen que contiene una densidad de carga ρ (cul/n³) la variación de la carga contenida está relacionada con la corriente que entra o sale de dicho volumen. Admitiendo la no generación ni desaparición de carga dentro de ese volumen, cualquier flujo de carga equivale a una corriente.

Tomemos un volumen ΔV . La carga encerrada será q . La variación de carga al cabo de un tiempo dt será

$$dq = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt$$

y si \vec{I} es la densidad de corriente que fluye de ese volumen la carga transportada ha sido

$$dq = dt \int_S \vec{I} \cdot d\vec{S}$$

Teniendo en cuenta que un flujo saliente equivale a una disminución de carga contenida y tomando un volumen cada vez más pequeño llegamos a

$$\text{div } \vec{I} = \nabla \cdot \vec{I} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (11.34)$$

llamada ecuación de continuidad de carga.

Esta ecuación es válida para corrientes estacionarias y corrientes variables con el tiempo.

11.19- El concepto de corriente de desplazamiento. - Supongamos una distribución de carga variable con el tiempo, $\rho(x, y, z, t)$. De (11.34) deducimos que $\nabla \cdot \vec{I} \neq 0$. Por otra parte, en (11.24) encontramos para campos estacionarios que

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{I}$$

Supongamos que esta expresión, deducida en estática, fuese - válida para campos variables con el tiempo. De ambas se deduce

$$\nabla \cdot \vec{I} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) \equiv 0 \quad (11.35)$$

ya que la divergencia de cualquier rotacional es nula.

Comparando (11.34) y (11.35) llegamos a una contradicción para aquellos sistemas en que la carga varíe con el tiempo. Debemos deducir que (11.24) está incompleta para el caso de campos función del tiempo..

Concluimos que la ecuación (11.24) debe sustituirse por otra relación para la situación de cargas variables con el tiempo

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{I} + \vec{i}$$

Veamos como Maxwell postuló esta incógnita. Si esperamos una cierta simetría las relaciones entre campos eléctricos y magnéticos, la ley de Faraday nos dice que un campo magnético variable genera un campo eléctrico y parece lógico esperar que un campo eléctrico variable genere un campo magnético. Maxwell postuló la necesidad de sumar el

término $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$:

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{I} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad (11.36)$$

Ahora se satisface la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{I} = - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

El término $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ debe tener las mismas dimensiones que \vec{I} , $A \cdot m^{-2}$, y como procede del vector desplazamiento, ha sido llamada corriente de desplazamiento. Es decir

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{I}_c + \vec{I}_d \quad (11.37)$$

donde

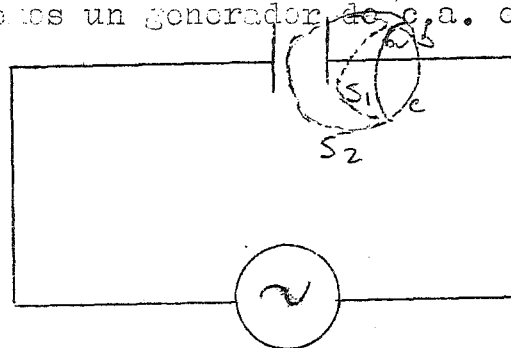
\vec{I}_c = densidad de corriente de conducción en $A \cdot m^{-2}$

\vec{I}_d = densidad de corriente de desplazamiento en $A \cdot m^{-2}$

La corriente de desplazamiento desaparece en electrostática y no es de gran importancia en los problemas usuales de baja frecuencia

cia. en que es mucho menor que la corriente de conducción en los metales. Este concepto es fundamental en los fenómenos de ondas electromagnéticas, resonancia y radiación.

Como ejemplo clásico consideremos un generador de c.a. excitado a un condensador. Según la ley de Ampère, la circulación de \vec{H} a lo largo de abcd debe ser igual a la corriente que atraviese cualquier superficie que se apoye en este contorno. Si elegimos una superficie S_1 que atravesase el conductor el resultado es el esperado. Si seleccionamos una superficie S_2 que pase entre las armaduras del condensador y



solo considerásemos la corriente de conducción, no habría corriente atravesando esta superficie y el resultado sería nulo. Obtendríamos dos resultados distintos para una misma situación. Es justamente la corriente de desplazamiento la que aparece entre las placas y es la que mantiene la continuidad de corriente entre las placas del condensador, dando el mismo resultado en los dos casos.

Así, para el caso de un condensador de placas paralelas de capacidad C , distancia interelectródica d , área A y tensión aplicada V sen ωt

$$I_c = C \frac{dV}{dt} = C \omega V_o \cos \omega t$$

$$E = \frac{V}{d} = \frac{V_o}{d} \sin \omega t$$

$$I_d = A i_d = A \frac{\partial D}{\partial t} = A \omega \epsilon \frac{V_o}{d} \cos \omega t = \\ = \omega C V_o \cos \omega t$$

El valor de la corriente de desplazamiento entre las placas es exactamente del mismo valor que la corriente de conducción que carga y descarga las placas.

11-20- Las ecuaciones de Maxwell.- Después de estudiar los trabajos experimentales de Faraday, James Clerk Maxwell formuló matemáticamente las relaciones eléctricas y magnéticas y postuló la corriente de desplazamiento. Su trabajo en 1863 culminó en la formulación de un grupo de ecuaciones que, tradicionalmente, se han venido llamando las ecuaciones de Maxwell.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{I} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

(11.38)

Todas las ideas y cálculos que hemos expuesto en este tema, hasta ahora, no deben considerarse como la deducción de estas fórmulas, ya que estas no se pueden derivar de otras leyes mas generales.

Constituyen un conjunto de ecuaciones diferenciales que relacionan - las variaciones espaciales y temporales de cargas y campos.

La primera es equivalente a la ley de Coulomb y es la Gauss generalizada. La segunda ecuación expresa la no existencia de manantiales de campo magnético excepto las corrientes. La tercera expresa la relación entre campo magnético, corriente de conducción y corriente de desplazamiento, y es la generalización de la ley de Ampère. La cuarta es la ley de Faraday.

Podemos escribir las ecuaciones de Maxwell para situaciones finitas o en gran escala, de manera que sean aplicables a toda clase de regiones y circuitos en el espacio.

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V dV = q$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (11.39)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

Las dos primeras se deducen de las dos primeras de (11,38) por integración a un determinado volumen y aplicando el teorema de Gauss. La primera es la ley de Gauss que ya conocemos de estática. Ahora que interviene el tiempo, podemos decir que, en cada instante, el flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada es igual a la carga encerrada por dicha superficie en ese instante. La segunda ecuación indica que el flujo magnético total que atraviesa una superficie cerrada, en cada instante, es nulo.

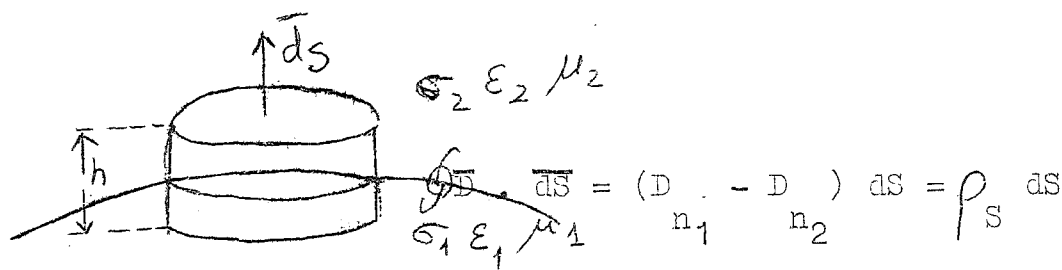
La tercera ecuación es la ley de Faraday, indicando que la circulación del campo eléctrico a lo largo de un camino cerrado (fuerza electromotriz) es igual a menos la variación del flujo magnético que atraviesa esta trayectoria.

Y la cuarta ecuación es la ley de Ampère generalizada, incluye la corriente de desplazamiento de Maxwell. Indica que la circulación del campo magnético a lo largo de un circuito cerrado (fuerza magnetomotriz) es igual a la corriente neta, conducción y desplazamiento que atraviesa ese circuito.

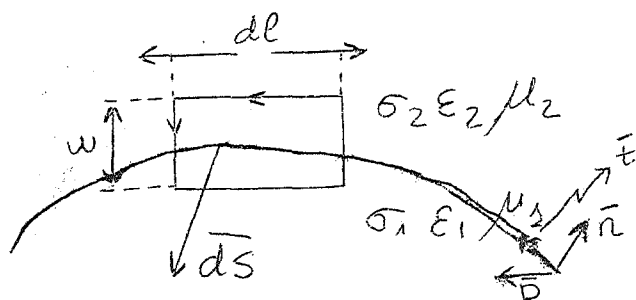
11.21- Condiciones de contorno para campos variables con el tiempo.- Estamos ahora interesados en las condiciones de contorno y continuidad que debemos aplicar a las soluciones de las ecuaciones de Maxwell. Estas condiciones las podemos deducir de las propias ecuaciones de Maxwell.

Representemos la separación entre los medios, medio 1 y medio 2, en que indicamos las conductividades y las permitividades y permeabilidades relativas.

Apliquemos la primera ecuación de (11.39), ley de Gauss, al volumen elemental de la figura:



siendo ρ_S la densidad de carga superficial en la superficie de separación. Si no hay cargas almacenadas



$$D_{n1} = D_{n2} \quad \text{o} \quad \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$$

(11.40)

Es decir para un contorno libre de cargas las componentes normales del desplazamiento son continuas; si hay cargas, son discontinuas justo en la densidad de carga superficial. Como vemos, dada la validez formal de la ley de Gauss para estática y para situaciones variables con el tiempo, los resultados tienen idéntica forma a los de electrostática.

Apliquemos al mismo volumen la segunda ecuación de (11.39).

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = (B_{n1} - B_{n2}) dS = 0 \quad (11.41)$$

$$B_{n1} = B_{n2} \quad \text{o} \quad \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$$

que indica la continuidad de las componentes normales de la densidad de flujo magnético.

Reemplacemos el volumen por la trayectoria rectangular indicada en la segunda figura. Apliquemos la ley de Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

haciendo w muy pequeño

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{t} dl + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{p} dS = 0$$

donde \vec{t} es un vector unitario tangencial a la superficie de separación, \vec{n} es el vector unitario normal y \vec{p} es un tercer vector unitario normal a \vec{t} y \vec{n} . Entonces \vec{p} , \vec{n} y \vec{t} forman un sistema

$$\vec{t} = \vec{p} \times \vec{n}$$

Si hacemos w muy pequeño dS irá tendiendo a cero y podemos escribir

$$E_{t1} - E_{t2} = 0 \quad (11.42)$$

Resultando válido también en electrostática.

Apliquemos ahora la cuarta ecuación de Maxwell, la de Ampère generalizada

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{I} \cdot \vec{p} \, ds + \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{p} \, ds$$

Si, igual que antes, ds va tendiendo a cero cuando w se hace muy pequeño

$$H_{t_1} = H_{t_2} \quad (11.44)$$

Sin embargo veremos que este resultado requiere una modificación para el caso de conductores perfectos.

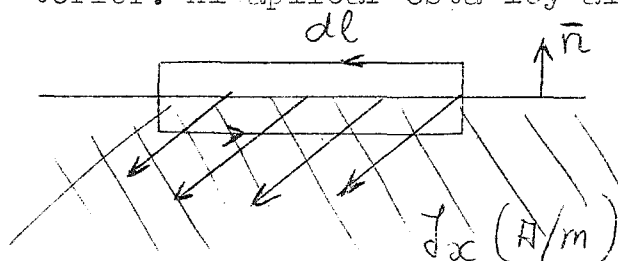
11.22.- Condiciones de contorno para un conductor perfecto.- Para un conductor cualquiera la ley de Ohm nos dice

$$\vec{I} = \sigma \vec{E}$$

Por definición, un conductor perfecto es el de conductividad infinita. En realidad ningún conductor es perfecto, pero es un caso ideal que tiene interés cuando tratamos con muy buenos conductores. Como la corriente que circule por un conductor perfecto ha de ser finita, es necesario que el campo eléctrico en el interior y su componente tangencial en la superficie del conductor sean nulos. Es decir, la condición de contorno básica para el caso ideal de un conductor perfecto es la anulación de la componente tangencial del campo eléctrico en su superficie.

$$E_t = 0 \quad (\text{en la superficie del conductor}) \quad (11.45)$$

En un conductor perfecto la corriente finita que circula por él circula por su superficie, por una capa de espesor nulo, dando lugar a una densidad de corriente infinita. Podemos hablar de una corriente por unidad de anchura ($A \cdot m^{-1}$). Entonces, por un área tendiendo a cero puede circular una corriente finita ya que la densidad superficial de corriente es infinita. La condición de contorno para el campo magnético queda modificada. En el interior del conductor no hay corrientes de conducción ni de desplazamiento. La ley de Ampère da $H_{t_1} = H_{t_2} = 0$ al aplicar a cualquier circuito interior. Al aplicar esta ley al rectángulo de la figura



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{J} \cdot d\vec{l}$$

$$H = H_{t_2} = J_x$$

que en notación vectorial

$$\vec{J} = \vec{n} \times \vec{H}$$

Hemos supuesto un conductor perfecto semiinfinito. Si se tratase de una lámina únicamente

$$H_{t_1} - H_{t_2} = J \quad (11.47) \quad \vec{J} = \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)$$

También en este caso se sigue verificando la igualdad entre la densidad de carga superficial y D_n .

En general, concluimos, se pudo demostrar que todos los campos electromagnéticos, en el caso de variación alterna con el tiempo, son nulos dentro de un conductor perfecto. En notación vectorial y siendo \vec{n} el vector unitario normal en la superficie

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D} = \rho_s$$

$$\vec{n} \times \vec{H} = \vec{J}$$

P R O G R A M A

TEMA I.- Sistemas de vectores deslizantes.

1.- Concepto de vector deslizante.- 2.- Momento polar de un vector deslizante.- 3.- Coordenadas de un vector deslizante. 4.- Sistemas de vectores deslizantes: resultante y momento resultante. 5.- Invariantes de un sistema de vectores deslizantes.- 6.- Eje central.- 7.- Aplicación a varios sistemas particulares de vectores. 8.- Operaciones que transforman un sistema en otro equivalente.- 9.- Rango y equivalencia entre sistemas.- 10.- Reducción de sistemas.

TEMA II.- Oscilaciones.

1.- Introducción a las ecuaciones diferenciales lineales.- 2.- movimiento armónico.- 3.- Oscilador ideal. 4.- Movimiento vibratorio con amortiguamiento proporcional a la velocidad. 5.- Vibraciones forzadas en un sistema con amortiguamiento. 6.- Resonancia.

TEMA III.- Dinámica de partículas.

1.- Dinámica de una partícula. Leyes de Newton. Trabajo. Energía. Potencial. Fuerzas conservativas y no conservativas. Conservación de la energía. Momento angular. Principios de conservación de la energía, de la cantidad de movimiento y del momento angular. 2.- Fuerzas interiores y exteriores al sistema de partículas. 3.- Centro de masas. 4.- Movimiento del centro de masas. 5.- Trabajo y energía de un sistema de partículas. 6.- Cantidad de movimiento de un sistema de partículas. 7.- Conservación de la cantidad de movimiento. 8.- Repaso de la dinámica de rotación de un cuerpo rígido. 9.- Momento angular de un sistema de partículas. 10.- Conservación del momento angular. Movimiento giroscópico. 12.- Estudio de un sistema de dos partículas. Masa reducida. 13.- Resumen de las magnitudes físicas conservativas en un sistema de partículas. Aplicación a la estática.

TEMA IV.- Choques.

1.- Introducción al problema general. 2.- Impulso y cantidad de movimiento. 3.- Planteamiento general. Choques elásticos e inelásticos. 4.- Sistemas de referencia. 5.- Caso general de choque inelástico. 6.- Caso general de choque elástico. 7.- Casos particulares de choques. Parámetro de impacto. 8.- Lección eficaz de choque.

TEMA VI.- Teoría cinética de gases.

1.- Introducción. 2.- Ecuación de estado de un gas ideal. 3.- Modelo de gas ideal según la teoría cinética de gases. 4.- Cálculo de la presión según el modelo cinético. 5.- Interpretación cinética de la temperatura. 6.- Fuerzas intermoleculares. 7.- Calores específicos de un gas ideal.

Continuación del programa de Física.

Efecto Doppler.- Reflexión de ondas progresivas.- Ondas estacionarias y sus características diferenciales con los progresivos vientres y nodos.

Electrostática.- Comparación de las fuerzas eléctricas con las gravitacionales.- Las dos modalidades de masas eléctricas y sus características: a) granulada o cauntificada. b) Conservación de la masa eléctrica. Fuerza entre cargas móviles; campo eléctrico y magnético y principio de superposición- Representación gráfica de los mismos; ventajas e inconvenientes de esta representación - Campos escalares.- Representación ordinaria z ; $\phi(x, y)$ en el caso de dos variables y sus correspondiente en el plano (x, y) mediante líneas de nivel - Derivada en una dirección; el gradiente como operador y su expresión vectorial: sus propiedades y relación entre ambos = Expresión del incremento $\Delta\phi$ en una dirección cualquiera \vec{r} . Líneas de pendiente máx. o líneas de fuerza = Generalización para tres variables - Operaciones con el operador ∇ : la divergencia, el rotacional y la laplaciana. Expresión del \oint a lo largo de una línea cualquiera entre dos líneas de nivel de un campo escalar; sus propiedades.

- Campos vectoriales, su representación - Definición de flujo saliente de un campo vectorial a través de una superficie y su expresión - Flujo saliente de un cubo elemental: teorema de Gauss y ecuación de continuidad - Circulación de un campo vectorial y su expresión integral = Circulación en un rectángulo elemental; teorema de Stokes - Clasificación de los campos: campos irrotacionales y solenoidales, sus características: potencial escalar y potencial vector - Las ecuaciones de electrostática y magnetostática de Maxwell Ley de Coulomb y superposición - Campo eléctrico de una o varias cargas, con distribución continua o discontinua

Potencial electrostático: su relación con el trabajo y energía potencial del campo- Flujo del campo electrostático y teorema de Gauss. Las dos ecuaciones fundamentales del campo electrostático: caso de no ser las fuerzas eléctricas del tipo de Coulomb.